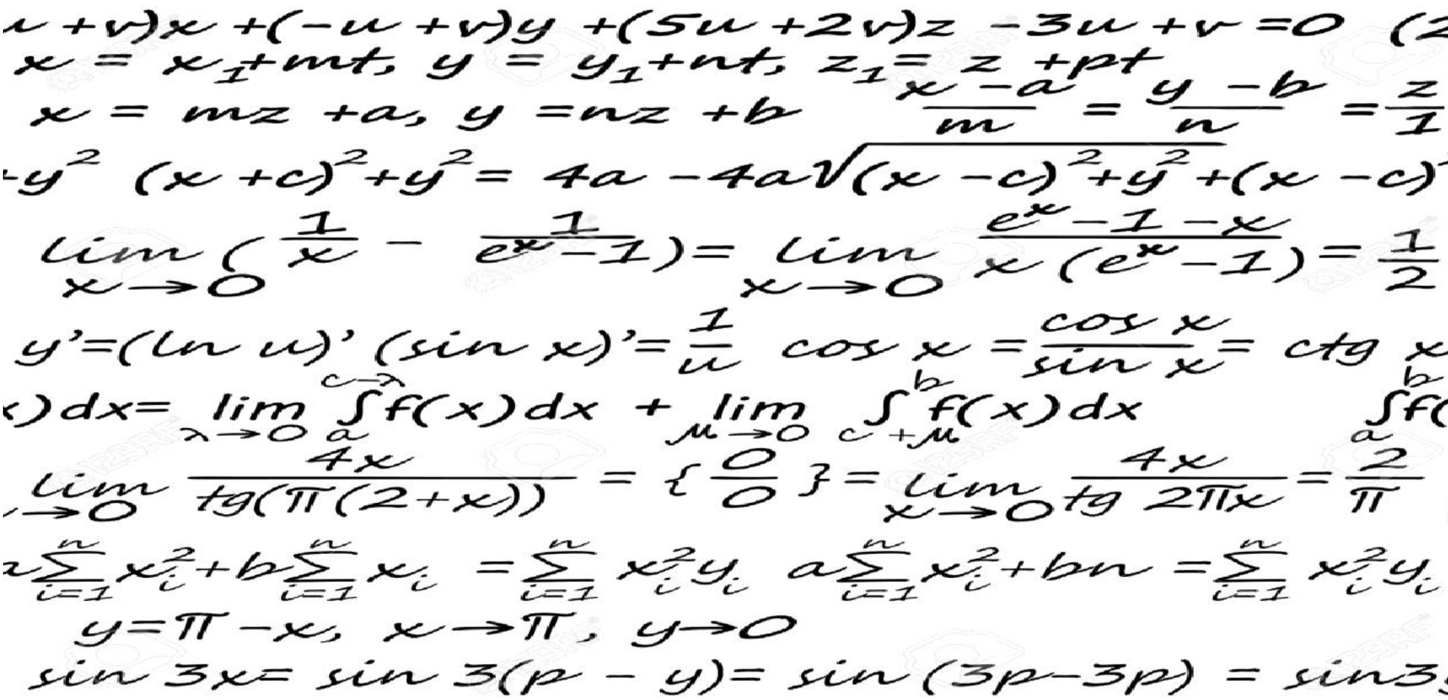
PREPARATION AUX OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES

$\sqrt{(\text{Tome 1 : Technique et astuce})^2}$



Auteur : SAMI _ABID

« وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله و المؤمنون »

Sami ABID

Etudiant de premier année
Baccalauréat filière sciences
Mathématiques

Introduction :

Les olympiades de mathématiques constituent la compétition la plus prestigieuse de mathématiques à travers le monde ,la premier participation de notre pays le Maroc aux olympiades internationale de mathématiques date de 1983 . Ce livre est centré spécifiquement sur les techniques et les propriétés sur « les inégalités » cet axe est plus important dans les mathématiques olympiques, avec des problèmes résolus de difficulté croissante ; pour aidera les étudiants passionnés par les mathématiques pour améliorer leurs compétences et acquérir certaines techniques en mathématiques.

Finalement, je tiens à remercier tous ceux qui ont participé à la collecte du contenu de ce livre et tous qui ont ma aidée de façons direct ou indirect .

Nous serons reconnaissants à ceux de nos lecteurs qui nous ferons parvenir leurs remarques , contactez nous sur l'adresse e-mail suivante swimidiba2007@gmail.com .

L' auteur

This book expresses my love for all Palestinian and Iranian people .

Dédié

Ce livre est un hommage à ma professeure compétente et sérieuse Mme Assia Illoussamen.

Je tiens à exprimer ma gratitude la plus profonde envers ma professeur de mathématiques Mme Assia Illoussamen . Je voudrais le remercier vivement pour sa grande patience , ainsi que pour ses explications très éclairantes et ses encouragements constants .

a Mme Assia Illoussamen

Table des matières

➢ Chapitre 1 : Les inégalités

- Les relations binaires $(\leq; \geq)$:………………….………………………..0
- Inégalité de basse :……………………………………………………1
- Inégalité arithmético-géométrique :………………………………...2
- Inégalité de Cauchy-Schwarz :……………………………………….....3
- Inégalité des mauvais élèves(titu) :…………………………..…..4
- Inégalité du réordonement ou réarrangement:………………....5
- Inégalité avec les moyennes :……………………………...……...6
- Inégalité de Tchébychev :……………………………………………......7
- Inégalité de Schur :……………………………………………………...8
- Inégalité de Bernoulli :…………………………………………………..9
- Inégalité de Hölder :…………………………………………………...10
- Inégalité de Shapiro :…………………………………………………….12
- Inégalité triangulaire :………………………………….………………13
- Définition : Somme cyclique :……………………………………….....14
- Caractéristiques d'une inégalité :…………………………………….....15
- Inégalité de Jensen :………………………………………………….....16

➢ Chapitre 2 : Les problèmes

- Les problèmes de degré 1 : (page$[\![18; 24]\!]$)
- Les problèmes de degré 2 : (page$[\![24; 29]\!]$)
- Les problèmes de degré 3 : (page$[\![30; 31]\!]$)
- Les challenges : (page$[\![31; 32]\!]$)

- Chapitre 3 : Les indications des problèmes
  - Les solutions des problèmes de degré 1 : (page$[\![34;43]\!]$)
  - Les solutions des problèmes de degré 2 : (page$[\![43;53]\!]$)
  - Les solutions des problèmes de degré 3 : (page$[\![54;58]\!]$)

- Index des symboles

Chapitre 1 :

Les inégalités

0 Les relation binaire ($\leq$; $<$; $\geq$; $>$)

*Définition générale :

Une relation binaire R sur un ensemble E est une propriété portant sur les couples d'éléments de E . On notera « aRb » le fait que la propriété est vraie pour le couple (a , b) $\in$ E $\times$ E et on dit que a est en relation avec b .

*Les qualités de la relation R sur E :

R est réflexive $\Leftrightarrow \forall$ x $\in$ E : xRx

R est symétrique $\Leftrightarrow \forall$ x,y $\in$ E : xRy $\Rightarrow$ yRx

R est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall$ x,y $\in$ E : (xRy et yRx) $\Rightarrow$ x=y

R est transitive $\Leftrightarrow \forall$ x, y, z $\in$ E : (xRy et yRz) $\Rightarrow$ xRz

- R est une relation d'équivalence $\Leftrightarrow$ R est réflexive , symétrique et transitive .
- R est une relation d'ordre $\Leftrightarrow$ R est réflexive , antisymétrique et transitive .

Donc d'après c'est définitions on remarque bien que $\leq , < , \geq , >$ sont des relations binaires sur l'ensemble $\mathbb{R}$ et les deux relations $\leq$ *et* $\geq$ sont des relations d'ordres.

*Remarque :

Soit a et b deux réels .

Si a $\leq b \Leftrightarrow$ a $< b$ $\overline{ou}$ a $= b$

Si a $\geq b \Leftrightarrow$ a $> b$ $\overline{ou}$ a $= b$

1 Inégalité de base

Nous savons que le carré d'un réel est toujours positif !!

En symboles :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}) : \ x^2 \geq 0}$$

*démonstration :

Pour $x \geq 0$, c'est vrai comme produit de deux nombres

positifs .

Pour $x \leq 0$, c'est vrai comme produit de deux nombres négatifs .

Donc dans tous les cas est vraie.

*Autre démonstration par une inégalité qu'ont vas voir :

D'après l'inégalité de réarrangement on a :

Supposons que $x \geq 0$:

$x \times x + 0 \times 0 \geq x \times 0 + 0 \times x \Rightarrow x^2 \geq 0$

Supposons que $0 \geq x$:

$0 \times 0 + x \times x \geq 0 \times x + x \times 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$

Dans les deux cas on a $x^2 \geq 0$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R} : x^2 \geq 0$

*Propriété très utiles :

$$\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 \geq 2ab$$

(avec cas d'égalité si et seulement si a = b)

2 Inégalité arithmético-géométrique

L'inégalité arithmético-géométrique est une inégalité célèbre et plus général .

*Théorème :

Soit n un entier strictement positif et $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. On a l'inégalité suivante :

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \times \ldots \times x_n}$$

Il y a égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux .

*Remarque :

L'inégalité est appelé inégalité arithmético-géométrique car elle compare la moyenne arithmétique $\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$ et la moyenne géométrique $\left(\sqrt[n]{x_1 \times \ldots \times x_n}\right)$ des x_i .

*Autre version du théorème :

Soient $a_1 ; \ldots ; a_k$ des nombres positifs et soient $\gamma_1 ; \ldots ; \gamma_k$ des nombres réels strictement positifs tels que $\gamma_1 + \cdots + \gamma_k = 1$. On a l'inégalité suivante : $\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_k a_k \geq a_1{}^{\gamma_1} \times \ldots a_k{}^{\gamma_k}$

Avec cas d'égalité si et seulement si $\forall (i\,; j)\ a_i = a_j$ telle que $\gamma_i \neq 0$ $et\ \gamma_j \neq 0$.

3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

*Théorème :

Soit n un entier strictement positif , $a_1, \ldots, a_n et\ b_1, \ldots, b_n$ des réels . On a l'inégalité suivante :

$(a_1{}^2 + \cdots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + \cdots + b_n{}^2) \geq (a_1\, b_1 + \cdots + a_n b_n)^2$

Autre façons d'écriture :

$$(\sum_{i=1}^{i=n} a^2{}_i)(\sum_{i=1}^{i=n} b^2{}_i) \geq (\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i)^2$$

Avec cas d'égalité si et seulement si tous les b_i sont nuls

ou il existe φ réel tels que ∀ i ∈ $\{1, \ldots, n\}$: $a_i = \varphi b_i$.

*Propriété utile :

Soit n ∈ ℕ*, $c_1 \ldots, c_n$ et $d_1 \ldots, d_n$ des réels positifs.

On a l'inégalité suivante :

$(c_1 + \cdots + c_n)(d_1 + \cdots + d_n) \geq (\sqrt{c_1 d_1} + \cdots + \sqrt{c_n d_n})^2$

Avec cas d'égalité si et seulement si tous les d_i sont nuls

ou il existe λ réel positif tel que ∀i ∈ $\{1, \ldots, n\}$: $c_i = \lambda d_i$.

*Remarque :

I.C.S peut s'écrire de la forme suivante :

$\vec{v}(x_1; \ldots; x_n)$ et $\vec{u}(y_1; \ldots; y_n)$ deux vecteurs

on a : $\|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \geq |\vec{v}.\vec{u}|$

4 Inégalité des mauvais élèves

*Théorème :

Soit n un entier strictement positif

$,e_1, \dots, e_n des\ réels, et\ f_1, \dots, f_n$

des réels strictement positifs .On a l'inégalité suivante :

$$\frac{{e_1}^2}{f_1} + \cdots + \frac{{e_n}^2}{f_n} \geq \frac{(e_1+\cdots+e_n)^2}{(f_1+\cdots+f_n)}$$

Autre façons d'écriture :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{{e_i}^2}{f_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^{i=n} e_i)^2}{\sum_{i=1}^{i=n} f_i}$$

Avec cas d'égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\forall$ i$\in\{1, \dots, n\}$: $\frac{e_i}{f_i} = \lambda$.

*Remarque :

Cette inégalité est extraite de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'avantage de celle-ci qu'elle est plus facile à utiliser pour cela elle est nommé (inégalité des mauvais élèves) .

5 Inégalité du réordonnement

*Rappel :

Soit n ∈ ℕ* ; $x_1, \dots, x_n et\ y_1, \dots, y_n$ des réels. On dit que les (y_i) sont une permutation des (x_i)si ce sont les mêmes nombres mais placés dans un ordre différent.

*Théorème :

Soient $(x_1; \dots; x_n)$ une suite ordonnée des nombres réels . Soient $y_1, \dots, y_n$ une deuxième suite des nombres réels et soit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ une permutation des (y_i).on a les inégalités suivantes :

$$\text{Si} \begin{cases} x_1 \geq \dots \geq x_n et\ y_1 \geq \dots \geq y_n \\ ou \\ x_1 \leq \dots \leq x_n\ et\ y_1 \leq \dots \leq y_n \end{cases} : x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \geq x_1 \gamma_1 + \cdots + x_n \gamma_n$$

$$\text{Si} \begin{cases} x_1 \geq \dots \geq x_n\ et\ y_1 \leq \dots \leq y_n \\ ou \\ x_1 \leq \dots \leq x_n\ et\ y_1 \geq \dots \geq y_n \end{cases} : x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq x_1 \gamma_1 + \cdots + x_n \gamma_n$$

Dans les deux cas , les deux sommes extrémales sont coïncident si et seulement si $(x_1 = \cdots = x_n)$ et $(y_1 = \cdots = y_n)$.(remarque :chaque suite de n nombres a pour (n!) permutations / ! : factorielle).

*D'où vienne l'idée :

Exemple de cette inégalité dans la vie quotidienne : si on a 3 stylos à encre noir et 2 stylos à encre bleue et 1 stylo à encre rouge et n'avons que trois choix de vente pour vendre chaque stylo , qui sont ⟨5dh ;3dh ;2dh⟩ . Donc pour gagner le maximum possible il faut que : 5dh doit être le prix de 1 stylo à encre noir et 3dh pour 1 stylo à encre bleue et 2dh pour 1 stylo à encre rouge ,si tous les stylos ont été vendus on va gagner $(3\times 5dh + 2 \times 3dh + 1 \times 2dh) = 23dh$; pour chaque autre choix de vente nous obtiendrons un profit inférieur à 23dh .

6 Inégalité avec les moyennes

*Théorème :

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs on a l'inégalité suivante :

$$\sqrt{\frac{{a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \times \dots \times a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\mathrm{MQ} \geq \mathrm{MA} \geq \mathrm{MG} \geq MH$$

Avec cas d'égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$.

*Remarque :

Ces inégalités recueillit la moyenne quadratique, la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique et la moyenne harmonique des valeurs a_i . C'est pour cella est appelé inégalités des moyennes .Comme vous remarquer cette inégalité contienne l'inégalité arithmético-géométrique.

7 Inégalité de Tchebychev

*Théorème :

Soient $x_1, \dots, x_n et\ y_1, \dots, y_n$ deux suites de nombres réels et n ∈ ℕ* .

- Si les deux suites sont ordonnées dans le même sens, ($\begin{cases} x_1 \geq \ldots \geq x_n\ et\ \ y_1 \geq \ldots \geq y_n \\ ou \\ x_1 \leq \ldots \leq x_n\ et\ \ y_1 \leq \ldots \leq y_n \end{cases}$) on a l'inégalité :

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \geq \frac{(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_n)}{n} \geq x_1y_n + \cdots + x_ny_1$$

D'autre écriture :

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \geq \frac{(\sum_{i=1}^{i=n} x_i)(\sum_{i=1}^{i=n} y_i)}{n} \geq \sum_{i=1}^{n} x_iy_{n-i+1}$$

- Si les deux suites sont ordonnées dans deux sens inverse, ($\begin{cases} x_1 \geq \ldots \geq x_n\ et\ \ y_1 \leq \ldots \leq y_n \\ ou \\ x_1 \leq \ldots \leq x_n\ et\ \ y_1 \geq \ldots \geq y_n \end{cases}$) on a l'inégalité :

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \leq \frac{(x_1+\cdots+x_n)(y_1+\cdots+y_n)}{n} \leq x_1y_n + \cdots + x_ny_1$$

D'autre écriture :

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leq \frac{(\sum_{i=1}^{i=n} x_i)(\sum_{i=1}^{i=n} y_i)}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} x_iy_{n-i+1}$$

Avec cas d'égalité si et seulement si $(x_1 = \cdots = x_n)$ ou $(y_1 = \cdots = y_n)$.

8 Inégalité de Shur

*Théorème :

Etant donné trois réels positifs a ; b ; c et un réel strictement positif ε on a l'inégalité suivante :

$$a^{\varepsilon}(a-b)(a-c)+b^{\varepsilon}(b-a)(b-c)+c^{\varepsilon}(c-a)(c-b)\geq 0$$

Autre façons d'écriture :

$$\sum_{cyc} a^{\varepsilon}(a-b)(a-c)\geq 0$$

Avec cas d'égalité si et seulement si (a$=b=c$) ou si deux variables sont égales et la troisième est nulle .

*Le cas le plus célèbre :

Soient a ,b, c des nombres réels positifs on a l'inégalité suivante :

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$$

Le cas d'égalité et le même de cas général .

(pour obtenir cette inégalité il suffit de remplacer dans l'inégalité de Shur ε par 1 et développé les produits .)

9 Inégalité de Bernoulli

*Théorème :

Soient θ *et* x deux nombres positifs on a l'inégalité suivante :

- Si $\theta \geq 1 : (1+x)^{\theta} \geq 1+\theta x$
- Si $1 \geq \theta \geq 0 : (1+x)^{\theta} \leq 1+\theta x$

Avec cas d'égalité si et seulement si :
$(\theta = 1 \ \overline{ou} \ \theta = 0)$ ou $x = 0$.

*Remarque :

Cette inégalité peux démontrée par plusieurs méthodes : en utilisant la notion de convexité ; en utilisant la binôme du Newton , le lecteur est invité à démontrer cette inégalité par une méthode citée .

*Application :

L'inégalité de Bernoulli peut être utilisée comme lemme pour démontrer que pour tout réel $\lambda > 1$, la limite de la suite géométrique (λ^n) est égale à $+\infty$.

10 Inégalité de Hölder

*Théorème :

Soit ($\varepsilon \in \mathbb{N}^*$) c'est le degré de l'inégalité de Hölder, et soit x_{ij} une collection de nombres réels positifs où i=1 ;…; n et j=1 ;…; ε , alors on a l'inégalité suivante :

$$\prod_{j=1}^{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij})^{\varepsilon} \geq (\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{\varepsilon}x_{ij})^{\varepsilon}$$

Avec cas d'égalité si et seulement s'il existe des nombres réels $\varphi_1, \ldots, \varphi_\varepsilon$ tel que :

$$\varphi_1\begin{pmatrix} x_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1n} \end{pmatrix} = \varphi_2\begin{pmatrix} x_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \ldots = \varphi_\varepsilon\begin{pmatrix} x_{\varepsilon 1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{\varepsilon n} \end{pmatrix}$$

*Inégalité de Hölder 2 :

Soient $x_1, \ldots, x_n et\ y_1, \ldots, y_n$ des nombres réels et p ; q des réels strictement positifs tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. on a l'inégalité suivante :

$$(\sum_{i=1}^{i=n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \times (\sum_{i=1}^{i=n}|y_i|^q)^{\frac{1}{q}} \geq (\sum_{i=1}^{i=n}|x_i y_i|)$$

Avec cas d'égalité si et seulement s'il existe un réel ε tel que : $\forall\ i \in \{1; \ldots; n\}$: $x_i{}^p = \varepsilon y_i{}^q$

12 Inégalité de Shapiro

*Théorème :

Soit les (x_i) des nombres réels strictement positifs :

On a l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$$

Après appliquer les permutations : $x_{i+n} \rightarrow x_i$ (en remplace $x_{i+n}\ par\ x_i$)

D'après nos démonstrations on sait que le maximum valeur pour n est 8 ,donc l'inégalité est vraie pour $n \in [\![1\ ;\ 8]\!]$.

*Le cas le plus célèbre

Soient a ;b et c trois nombres réels strictement positifs on a l'inégalité suivante :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

*Remarque :

Cette dernier s'appelle inégalité de Nesbitt .

13 Inégalités triangulaire

*Théorème :

Soit A , B et C trois point d'espace constituent un triangle quelconque (peut être un triangle aplati ,triangle dégénéré leur sommets sont alignés)on a les inégalité suivante :

- $AB + BC \geq AC$
- $AB + AC \geq BC$
- $AC + BC \geq AB$

*Théorème :

Soit $\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \ldots; \overrightarrow{v_n}$ des vecteurs dans l'espace on a

L'inégalité suivante :

$$\|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_2\| + \ldots + \|\vec{v}_n\| \geq \|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n\|$$

Avec cas d'égalité si et seulement si tous les vecteurs $\vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_n$ sont colinéaires deux à deux et de mêmes sens .

*Théorème :

Soient $x_1; x_2; \ldots; x_n$ des réels on a l'inégalité suivante :

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \geq |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|$$

Avec cas d'égalité si et seulement si

$$\forall\, i \in \{1; \ldots; n\} : \ x_i \geq 0 \text{ ou } x_i \leq 0$$

Somme cyclique ?

*Définition générale :

La notion du somme est une notion très utile en mathématiques il sert a simplifier l'écriture d'une expression mathématique , nous verrons dans cette partie un type de sommations appelé somme cyclique .

*Somme cyclique :

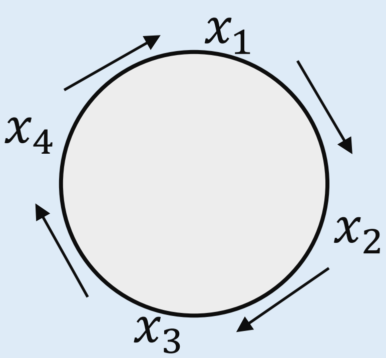
Leur notation : $(x_1; x_2; ...; x_n)$: $\sum_{cyc} P(x_m, ..., x_k)$

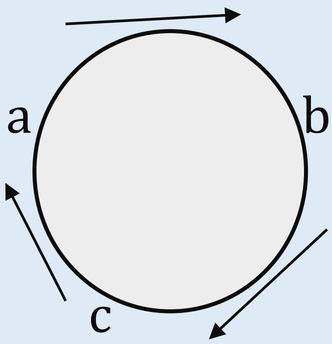
$P(x_m, ..., x_k)$: l'expression cyclique $(1 \leq (k \; et \; m) \leq n)$

$(x_1, x_2, ..., x_n)$: les variables existants.

<u>Méthode de calcul</u> : on trace un cercle puis en place

les variables existants de façon ordonnée (le sens alphabétique ou numérique). Exemples :





$(x_1, ..., x_n)$: $\sum_{cyc} P(x_m, ..., x_k) = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_{\sigma\circ...\circ\sigma(m)}, ..., x_{\sigma\circ...\circ\sigma(k)})$

Avec $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ un cycle d'ordre n−1 .

Puis on applique une permutation des variable successive sur l'expression cyclique : (exemple pour 3 variables)

$$(x_1, x_2, x_3)\ \sum_{cyc} \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \sum_{cyc} {x_1}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$$

Les cas les plus célèbre :

$$(a, b; c) \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$(a; b; c) \sum_{cyc} a^2 b = a^2 b + b^2 c + c^2 a$$

$$(a; b; c; d) \sum_{cyc} a - \frac{1}{b} = (a - \frac{1}{b}) + (b - \frac{1}{c}) + (c - \frac{1}{d}) + (d - \frac{1}{a})$$

$$(a; b; c) \sum_{cyc} \frac{a}{bc} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ba}$$

$$(a; b; d) \sum_{cyc} \frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\sqrt{b}}{d} + \frac{\sqrt{d}}{a}$$

Remarque : la somme cyclique d'une expression égale la somme de n termes tels que :

Card(les variables existant)= n .

Caractéristiques d'une inégalité

*Inégalité homogène :

Une inégalité est dite homogène si , lorsqu'on multiple chaque variable de l'inégalité par une même constante strictement positif , on retombe sur la même inégalité .

*Exemple :

Pour k > $0\ on\ a$: (∀a ,b ,c> 0)

$\frac{ka}{kb+kc}+\frac{kb}{kc+ka}+\frac{kc}{ka+kb}\geq\frac{3}{2}$ donc l'inégalité $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{3}{2}$ est une inégalité homogéne .

*Inégalité symétrique :

Une inégalité est dite symétrique si , lorsqu'on permute les variables de manière quelconque on retombe sur la même inégalité . Cela revient à dire que chaque variable joue le même rôle dans l'inégalité.

*Exemple :

l'inégalité $\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab}\geq 6$ est une inégalité symétrique .

14 Inégalité de Jensen

*Théorème :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I , soit $x_1, x_2, \ldots., x_n$ *des* élements de l'intervalle I et $0 \leq \omega_1, \ldots., \omega_n \leq 1$ des réels positifs tels que $\omega_1 + \ldots + \omega_n = 1$.

- Si f est convexe sur I ($f^{''} \geq 0$) on a l'inégalité

$$\omega_1 f(x_1) + \ldots. + \omega_n f(x_n) \geq f(\omega_1 x_1 + \ldots. + \omega_n x_n)$$

autre écriture : $\sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i)$

- Si f est concave sur I ($f^{''} \leq 0$) on a l'inégalité :

$$\omega_1 f(x_1) + \ldots. + \omega_n f(x_n) \leq f(\omega_1 x_1 + \ldots. + \omega_n x_n)$$

autre écriture : $\sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) \leq f(\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i)$

(Avec cas d'égalité si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n$)

Remarque :

L'inégalité de Jensen intrinsèque dans le monde des inégalités , cette inégalité est très utile pour minoré ou majoré une expression algébriquement complexe ou étudier le signe d'une fonction .

Chapitre 2 :

Les problèmes

- Les problèmes de degré 1 :

Problème 1 : (lemme de tourniquet)

Montrer que $\forall$ a ,b ,c $\in \mathbb{R}$:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \ ab \ + \ bc \ + \ ac$$

Problème 2 :

Montrer que quelque soit a un réel strictement positif :

$$a + \frac{1}{a} \geq \ 2$$

Problème 3 :

Soient x et y des réels strictement positifs . Montrer que

$$x + \frac{y^2}{x} \geq \ 2y$$

Problème 4 :

Soit x , y des réels . Montrer que

$$5x^2 + y^2 + \ 1 \ \geq \ 4xy \ + \ 2x$$

Problème 5 :

Soient a, b et c des nombres réels . Montrer que

$$2a^2 + 20b^2 + 5c^2 + 8ab - 4bc - 4ac \ \ \geq \ 0$$

Problème 6 :

Soient a , b et c des réels positifs tel que : ab + bc + ac = 1

Montrer que : a + b + c ≥ $\sqrt{3}$

Problème 7 :

Soient $a_1; a_2; ...; a_n$ des nombres réels positifs vérifiant

$a_1 \times a_2 \times ... \times a_n = 1$ et n ∈ $\mathbb{N}^*$

Montrer que : $\prod_{i=1}^{i=n}(a_i + 3) \geq 4^n$

Problème 8 :

Soient a , b et c trois nombre réels strictement positifs .

Monter que : (a ;b ;c) $\sum_{cyc} \frac{a}{b} \geq 3$

Problème 9 :

Monter que pour tous réels a , b et c et tous réels strictement positifs x , y et z on a :

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Problème 10 :

Soient x et y deux réels vérifiant : $x + y = 1$

Montrer que : $xy \leq 1$

Problème 11 :

Soient a ;b et c trois nombres réels strictement positifs

Montrer que :

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \geq 3$$

Problème 12 :

Soient a ;b ;c et d des réels positifs . Montrer que

$$a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$

Problème 13 :

Soient x ; y et z trois nombres réels . Monter que :

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \text{ et}$$

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$$

Problème 14 :

Soient a , b et c trois réels non nuls . Montrer que

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

Problème 15 :

Soient a , b et c des réels positifs . Monter que

$$2(a^3+b^3+c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$$

Problème 16 :

Soit x un réel , on pose $x^5 - x^3 + x = a$.

Monter algébriquement (sans utiliser les fonctions) :

$$x^6 \geq 2a - 1$$

Problème 17 :

Soient x , y , z des réels tels : $\begin{cases} z > 0 \\ |x+y| \leq z \\ |x-y| \leq z \end{cases}$

Monter que : $|x| + |y| \leq z \ et \ |xy| \leq \frac{z^2}{4}$

Problème 18 :

Soient a , b deux réels et x , y deux réels strictement positifs .

Montrer sans utiliser l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Problème 19 :

Soient x et y deux réels . Montrer que :

- $|x| + |y| \geq |x + y|$
- $|x + y| + |x - y| \geq |x| + |y|$
- $(|x - 1| + 1)(|y - 1| + 1) \geq |xy - 1|$
- $\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \geq \frac{|x+y|}{1+|x+y|}$

Problème 20 :

Soient a , b , c et d des entiers naturels tels que

$$1 < a < b < c < d$$

Montrer que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} \leq \frac{31}{24}$

Problème 21 : (combinaison avec la logique !!)

Soient x , y et z des réels positifs tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Montrer que :

$[(x + y + z \leq 2 + xy) \ \overline{ou} \ ((xy)^2 + (x + y - z)^2 \geq 0)] \Leftrightarrow F$

(F : la proposition toujours fausse , antilogie)

Problème 22 :

Soit a , b et c trois réels strictement positifs .

Montrer que : $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leq \frac{a+b+c}{2}$

Problème 23 :

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

Montrer que :

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy}$$

Problème 24 :

Soit a > 0 et n ≥ 1 un entier .

Montrer que :

$$\frac{a^n}{1 + a + \ldots + a^{2n}} < \frac{1}{2n}$$

Problème 25 :

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs

tels que : x + y = 1

Montrer que :

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} \geq \frac{1}{3}$$

Problème 26 :

Soient x , y et z des éléments de l'intervalle

$[0\ ;\ 1]$. Montrer que :

$$xy + yz + xz \leq x + y + z \leq 1 + xy + yz + xz$$

Problème 27 :

Soient $x , y > 1$. montrer que

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq 8$$

Les problèmes de degré 2 :

Problème 1 :

Soient a , b et c des réels strictement positifs .

Montrer que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Problème 2 :

Soient a , b et c des entiers relatifs distincts de 1

Montrer que :

$$\begin{cases} a + b \leq ab \\ b + c \leq bc \end{cases} \Rightarrow a + c \leq ac$$

Problème 3 :

Soient a , b et c des réels strictement positifs

tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Montrer que

$$\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ac+1} \geq \frac{3}{2}$$

Problème 4 :

Soient a , b et c des réels strictement positifs.

Montrer que :

$$\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{a^2+c^2} + \frac{c^3}{a^2+b^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Problème 5 :

Soient a , b et c des réels strictement positifs ,

montrer que :

$$\frac{a}{2c+a} + \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} \geq 1$$

Problème 6 :

soit x , y et z trois nombres réels strictement positifs vérifiant xyz = 1 . Montrer que

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 3(x+y+z+1)$$

Problème 7 :

Soit x un réel strictement positif tels que

$$x^5 - x^3 + x \geq 3$$

Montrer que : $x^6 \geq 5$ (sans utilisé l'étude des fonctions)

Problème 8 :

Soient x , y et z des réels strictement positifs tels que :

$$xyz(x+y+z) = 1$$

Montrer que : $(x+y)(y+z) \geq 2$

Problème 9 :

Soient x , y et z des réels strictement positifs

Montrer que :

$$\frac{y^2+z^2}{x} + \frac{x^2+z^2}{y} + \frac{x^2+y^2}{z} \geq 2(x+y+z)$$

Problème 10 :

Soient a , b , c et d des réels tels que a $\neq 0$ *et* $b \neq 0$

Montrer que :

$$(a-c)^2 + (b-d)^2 \geq \frac{(ad-bc)^2}{a^2+b^2}$$

Problème 11 :

Soit n un entier naturel . Montrer que

$$(\frac{n+1}{2})^n \geq n!$$

Indication : utiliser l'inégalité de Bernoulli

Problème 12 :

Soient a , b et c des réels strictement positifs tels que

abc = 1, Montrer que :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Problème 13 :

Soient a , b et c les longueurs des côtés d'un triangle (triangle non aplati)

Montrer que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Problème 14 :

Soient a , b et c des réels strictement positifs

Montrer que :

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{abc} \geq a+b+c$$

Problème 15 :

Soient x , y et z des réels strictement positifs tels que : $x + y + z = 1$.

Montrer que :

$$\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3}$$

Problème 16 :

Soient x , y et z des réels strictement positifs

tels que : $x + y + z = 3$. Montrer que :

$$\frac{\sqrt{x}}{y+z} + \frac{\sqrt{y}}{x+z} + \frac{\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Problème 17 :

Soit x , y , z des réels positifs tels que :

$x + y + z = 3$. Montrer que :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + xz$$

- ## Les problèmes de degré 3 :

Problème 1 : (Iran, 1998)

Soient x , y , z > 1 tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2$

Montrer que :

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

Problème 2 : (Hong Kong , 1998)

Soient a , b , c ≥ 1

Montrer que :

$$\sqrt{c(ab+1)} \geq \sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$$

Problème 3 : (Iran, 2017)

Soient x et y deux réels distinctes strictement positifs tel que $x^4 - y^4 = x - y$.

Montrer que :

$$\frac{4}{3}(x+y) \geq \frac{x-y}{x^6-y^6}$$

Problème 4 :(Vietnam,1991)

Soient $x \geq y \geq z > 0$

Montrer que :

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$$

Problème 5 :

Soient a , b et c des réels strictement positifs

tels que : abc = 1. Montrer que :

$$\frac{1+ab^2}{a^3} + \frac{1+bc^2}{b^3} + \frac{1+ca^2}{c^3} \geq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

- **Les challenges :**

Challenge 1 :

Soient x , y, z > 0 . Montrer que :

$$\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+xz)} \leq \frac{3+\sqrt{3}}{9}$$

Challenge 2 :

Soient a , b , c > 0 . Montrer que :

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{2a}{a+b}} \leq 3$$

Challenge 3 :

Soient a , b , c $\geq$ $tels\ que : \ a+b+c \geq abc$

Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$

Challenge 4 :

Soient x , y et z des réels . Montrer que :

$$|x| + |y| + |z| + |x+y+z| \geq |x+y| + |y+z| + |x+z|$$

Challenge 5 :

Soient x , y , z > 0 . Montrer que :

$$\sum_{cyc} \frac{x}{xz + 2x + 1} \leq \frac{3}{4}$$

Chapitre 3 :

Les solutions des problèmes

- Les solutions des problèmes de degré 1 :

Problème 1 :

On a $\forall\ a , b , c \in \mathbb{R}$:

$$(a-b)^2 \geq 0 , (b-c)^2 \geq 0 , (a-c)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab , b^2 + c^2 \geq 2bc , a^2 + c^2 \geq 2ac$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

D'où le résultat .

Problème 2 :

On a $\forall\ a > 0 :\ \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2 \times \sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$$

D'où le résultat .

Problème 3 :

on a $\forall$ x , y $> 0 :\ (\sqrt{x} - \frac{y}{\sqrt{x}})^2 \geq 0$

D' ou : x + $\frac{y}{x} \geq 2y$

Problème 4 :

On a ∀ x , y :

$$(2x - y)^2 \ + \ (x - 1)^2 \ \geq \ 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 \ + \ y^2 + 1 \geq \ 4xy \ + \ 2x$$

D'où le résultat

Problème 5 :

On a ∀ a , b , c ∈ ℝ :

$$(a - 4b)^2 \ + \ (a - 2c)^2 \ + \ (2b - c)^2 \ \geq \ 0$$

$$\Rightarrow 20b^2 + \ 2a^2 + 5c^2 - 8ab - 4ac - 4bc \ \geq \ 0$$

D'où le résultat .

Problème 6 :

en utilisant la lemme de tourniquet on a :

$$\forall \text{ a , b , c} \geq 0 : a^2 + b^2 + c^2 \geq \ ab \ + \ bc \ + \ ac$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ + 2ab + 2bc + 2ac \ \geq \ 3(ab + bc + ac \ )$$

$$\Rightarrow (a + b + c)^2 \geq \ 3(ab + bc + ac)$$

$$\Rightarrow \ (a + b + c)^2 \geq 3$$

D'où : $a + b + c \ \geq \ \sqrt{3}$

Problème 7 :

On a $\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_n \geq\ 0$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + 3) = \prod_{i=1}^{n}((a_i + 1)\ + 2)$$

$$=((a_1 + 1) + 2)((a_2 + 1) + 2)\ldots((a_n + 1) + 2)$$

On a : $\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$:

$$a_1 + 1 \geq 2\sqrt{a_1}\ ;\ a_1 + 1 \geq 2\sqrt{a_1}\ ;\ \ldots\ldots ; a_1 + 1 \geq 2\sqrt{a_1}$$

$$\Rightarrow a_1 + 3 \geq 2\sqrt{a_1}\ + 2; a_2 + 3 \geq 2\sqrt{a_2}\ + 2; \ldots ; a_n + 3 \geq 2\sqrt{a_n}\ + 2$$

On a : $2\sqrt{a_1}\ + 2 \geq 4\sqrt[4]{a_1}\ ;\ 2\sqrt{a_2}\ + 2 \geq 4\sqrt[4]{a_2}\ ; \ldots ;\ 2\sqrt{a_n} + 2 \geq\ 4\sqrt[4]{a_n}$

$$\Rightarrow a_1 + 3 \geq 4\sqrt[4]{a_1}\ ;\ a_2 +\ 3 \geq 4\sqrt[4]{a_2}\ ; \ldots\ldots ; a_n + 3 \geq 4\sqrt[4]{a_n}$$

$\Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n}(a_i + 3)\ \geq\ 4^n$, d'où le résultat .

Problème 8 :

On a $\forall$ a , b , c $>\ 0$: $\sum_{cyclic}\frac{a}{b}\ = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

En utilisant l'inégalité AM.GM d'ordre 3 on obtienne le résultat .

Problème 9 :

En appliquant l'inégalité des mauvais élèves

On obtienne le résultat demander .

Problème 10 :

On a : x + y = 1

$\Rightarrow (x + y)^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2xy$

On a : $\forall$ x , y : $x^2 + y^2 \geq 2xy$

$\Rightarrow 1 - 2xy \geq 2xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}$

Problème 11 :

Appliquer l'inégalité AM.GM d'ordre 3

Problème 12

On a : $\forall$ a , b , c , d ≥ 0

$a + b + c + d \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc}$

$\geq 2\times 2\sqrt[4]{abcd}$

$\geq 4\sqrt[4]{abcd}$

D'où le résultat .

Problème 13 :

En utilisons la lemme de tourniquet on obtienne le résultat .

Problème 14 :

On pose $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ $et\ z\ = \frac{c}{a}$ tel que

a , b , c $>$ 0 . Donc d'après la lemme de tourniquet on a :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

D'où le résultat.

Problème 15 :

On a ∀ a , b , c $\geq$ O :

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

$$b^2 - bc + c^2 \geq bc$$

$$a^2 - ac + c^2 \geq ac$$

Donc : (a + b)$(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$

$$(b + C)(b^2 - bc + c^2) \geq bc(b + c)$$

$$(a + c)(a^2 - ac + c^2) \geq ac(a + c)$$

Sommons les trois inégalités et on obtienne le résultat : $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq$

$$\mathrm{ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)}$$

Problème 16 :

On sait que : $x^6 + 1 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)$

Et ∀ x ∈ ℝ : $x^2 + 1 \geq 2x$ *et* $x^4 - x^2 + 1 > 0$

Donc : $(x^2+1)(x^4 - x^2 + 1) \geq 2x(x^4 - x^2 + 1)$

D'où : $x^6 \geq 2a - 1$

Problème 17 :

Pour montrer $|x| + |y| \leq z$ il suffit de démontrer dans les cas suivante :

- $x \geq 0 \; et \; y \geq 0$
- $x \leq 0 \; et \; y \leq 0$
- $x \geq 0 \; et \; y \leq 0$
- $x \leq 0 \; et \; y \geq 0$

Pour montrer $|xy| \leq \frac{1}{4}z^2$ il suffit d'utiliser :

L'inégalité $|x| + |y| \geq 2\sqrt{|xy|}$

Problème 18 :

En simplifiant l'expression :

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} = \frac{(ya - xb)^2}{xy(x+y)} \geq 0$$

D'où le résultat .

Problème 19 :

- On a $(|x|+|y|)^2-(|x+y|)^2=2(|xy|-xy)\geq 0$

D'où le résultat

- Il suffit de démontrer dans les suivantes

$(x\,,y\ \geq\ 0)\,,(\,x\,,y\ \leq 0),(x\geq 0 et\ y\leq 0),(x\leq 0 et\ y\geq 0)$

- On pose a = x−1 et b = y−1 on a l'inégalité suivante

$$|ab|+|a|+|b|+1\geq|a+b+ab|$$
$$\Rightarrow(|a|+1)(|b|+1)\geq|(a+1)(b+1)-1|$$

En remplacent a et b par leur valeur on obtienne le résultat .

- On pose $f(x)=\frac{x}{x+1}$ f *est une fonction croisante sur* $\mathbb{R}^+$

On a $|x|+|y|\geq\ |x+y|\geq 0\Rightarrow f(|x|+|y|)\geq f(|x+y|)$

$\Rightarrow\ \frac{|x|+|y|}{|x|+|y|+1}\geq\ \frac{|x+y|}{|x+y|+1}$ *et on a* $\frac{|x|}{|x|+1}+\frac{|y|}{|y|+1}\geq\frac{|x|}{|x|+|y|+1}+\frac{|y|}{|x|+|y|+1}$. D'où : $\frac{|x|}{|x|+1}+\frac{|y|}{|y|+1}\geq\ \frac{|x+y|}{|x+y|+1}$

Problème 20 :

On a : $1<a<b<c<d$

$\Rightarrow\ a\geq\ 2\,,b\geq 3\,,c\geq 4\,,d\geq 5\ et\ abcd\ \geq\ 120$

$\Rightarrow\ \frac{1}{a}\leq\ \frac{1}{2},\frac{1}{b}\leq\frac{1}{3}\,,\frac{1}{c}\leq\frac{1}{4},\frac{1}{d}\leq\frac{1}{5}\ et\ \frac{1}{abcd}\leq\frac{1}{120}$

$\Rightarrow\ \ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{abcd}\ \leq\ \frac{31}{24}$

Problème 21 :

Rappel : soit P et Q deux propositions on a

Non (P $\overline{ou}$ Q) ⇔ (P⇔Q)

Donc pour montrer que

$((x + y + z \leq xy + 2\ \overline{ou}\ (xy)^2 + (x + y - z)^2 \geq\ 0)$

est une proposition fausse il suffit de montrer que la proposition suivante est vraie :

$(x + y + z \leq xy + 2 \Leftrightarrow (xy)^2 + (x + y - z)^2 \geq 0)$

Problème 22 :

On a ∀ a , b , c des réels strictement positifs :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0, (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab\ , \frac{(b+c)^2}{4} \geq\ bc\ ,\ \frac{(a+c)^2}{4} \geq ac$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{4} \geq \frac{ab}{a+b}\ , \frac{b+c}{4} \geq \frac{bc}{b+c}\ , \frac{a+c}{4}\ \geq \frac{ac}{a+c}$$

Sommons tous ces inégalités et on obtienne le résultat

Problème 23 :

On a ∀ x , y > 0 :

$$x^4 + y^2\ \geq 2x^2y\ \ et\ x^2 + y^4\ \geq 2xy^2$$

$$\Rightarrow \frac{X}{x^4+y^2}\ \leq\ \frac{1}{2xy}\ et\ \frac{y}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{2xy}$$

Sommons les deux inégalités et on obtienne le résultat

Problème 24 :

D'après l'inégalité AM.GM on a ∀ a > 0 :

$$\frac{1 + a + \ldots + a^{2n}}{2n + 1} \geq \sqrt[2n+1]{a^{0+1+\ldots+2n}} = a^n$$

Et on a ∀ n > 0 : $\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n+1}$

$$\Rightarrow \frac{1+a+\ldots.+a^{2n}}{2n} > a^n$$

D'où : $\frac{1}{2n} > \frac{a^n}{1+a+\ldots.+a^{2n}}$

Problème 25 :

on Utilisons l'inégalité des mauvais élèves on obtienne le résultat .

Problème 27 :

On a : $x \leq 1$, $y \leq 1, z \leq 1$

$$\Rightarrow xy \leq y \text{ , } yz \leq z, xz \leq x$$

$$\Rightarrow xy + yz + xz \leq x + y + z$$

On a $(x - 1)(y - 1)(z - 1) \geq 0$

$$\Rightarrow 1 + xy + yz + xz \geq x + y + z + xyz \geq x + y + z$$

Problème 28 :

D'après l'inégalité des mauvais élèves on a :

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geq \frac{(x+y)^2}{x+y-2}$$

On a ∀ x + y > 2 :

$$(x+y)^2+16 \geq 8(x+y)$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 \geq 8(x+y-2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x+y)^2}{x+y-2} \geq 8$$

D'où : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geq 8$

- Les solution des problèmes de degré 2 :

Problème 1 :

On a : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ba+bc}+\frac{c^2}{ac+bc}$

D'après l'inégalité des mauvais élèves on a :

$$\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ab+bc}+\frac{c^2}{ac+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)}$$

D'après la lemme de tourniquet on a :

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac)$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ac)} \geq \frac{3}{2}$$

D'où : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Problème 2 :

On a : ab ≥ a + b et bc ≥ b + c

$\Rightarrow$ a(b −1) $- b + 1 \geq 1$ et c(b−1)−b + 1 ≥ 1

$\Rightarrow$ (b− 1)$(a-1) \geq 1$ et (b−1)$(c-1) \geq 1$

Il y a deux cas possible soit b > 1 $soit\ b < 1$

- Si b > 1 ⇒ b−1 > 0

$$\Rightarrow b - 1 \geq 1$$
$$\Rightarrow a - 1 \geq 1 \ et \ c - 1 \geq 1$$
$$\Rightarrow (a - 1)(c - 1) \geq 1$$
$$\Rightarrow ac - a - c + 1 \geq 1$$
$$\Rightarrow ac \geq a + c$$

- Si b < 1 ⇒ b − 1 ≤ −1

$$\Rightarrow a - 1 \leq -1 \ et\ c - 1 \leq -1$$
$$\Rightarrow (a - 1)(c - 1) \geq 1$$
$$\Rightarrow ac \geq a + c$$

D'où l'implication .

Problème 3 :

D'prés l'inégalité des mauvais élèves on a :

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{(1+1+1)^2}{ab + bc + ac + 3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geq \frac{9}{ab+bc+ac+3}$$

D'après la lemme de tourniquet on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \Rightarrow 3 + 3 \geq ab + bc + ac + 3$$

$\Rightarrow \quad \frac{9}{ab+bc+ac+3} \geq \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, D'où le résultat .

Problème 4 :

Remarquons que l'inégalité est symétrique , donc on peut supposer sans perte de généralité que : $a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow a^2 \geq b^2 \geq c^2 \Rightarrow \frac{a}{b^2+c^2} \geq \frac{b}{a^2+c^2} \geq \frac{c}{a^2+b^2}$$

Donc d'après l'inégalité de réordonnement on a :

$$\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{a^2+c^2} + \frac{c^3}{a^2+b^2} \geq \frac{ab^2}{b^2+c^2} + \frac{bc^2}{a^2+c^2} + \frac{ca^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{a^2+c^2} + \frac{c^3}{a^2+b^2} \geq \frac{ac^2}{b^2+c^2} + \frac{ba^2}{a^2+c^2} + \frac{cb^2}{a^2+b^2}$$

Sommons les deux inégalités et divisons les deux extrêmes par $\frac{1}{2}$ et on obtienne le résultat .

Problème 5 :

On a $\forall$ a, b, c > 0 :

$$\frac{a}{2c+a} + \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} = \frac{a^2}{2ac+a^2} + \frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2}$$

D'après l'inégalité des mauvais élèves on a :

$$\frac{a^2}{2ac+a^2} + \frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}$$

$$\frac{a^2}{2ac+a^2} + \frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1$$

D'où le résultat .

Problème 6 :

D'après la lemme de tourniquet on a :

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{x}\right)^2 \geq \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)+\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{x}\right)^2 \geq xy+\frac{x}{z}+1+\frac{1}{yz}+xz+1+\frac{z}{y}+\frac{1}{xy}+yz+\frac{y}{x}+1+\frac{1}{xz}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 3+x+y+z+xy+yz+xz+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}$$

On a $\forall$ x , y , z > 0 :

$$\mathrm{xy}+\frac{y}{x} \geq 2y\,,\quad xz+\frac{x}{z} \geq 2x\,,\quad yz+\frac{z}{y} \geq 2z$$

d'où : $\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 3(x+y+z+1)$

Problème 7 :

On a : $x^6+\ 1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

On a : $\forall$ x $>\ 0$: $x^2+1 \geq 2x$

On a : $(x^2-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^4-x^2+1 \geq x^2 > 0$

Donc : $(x^2+1)(x^4-x^2+1) \geq 2x(x^4-x^2+1)$

$$\Rightarrow x^6+1 \geq 2(x^5-x^3+x) \geq 2\times 3$$

D'où : $x^6 \geq 5$

Problème 8 :

On a $\forall\, x , y , z > 0$

$$(\sqrt{xz} - \frac{1}{\sqrt{xz}})^2 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{xz} + \frac{1}{xz} \geq 2$$

On a : $\mathrm{xyz(x + y + z)}=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{xz} = y(x + y + z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xz} = xy + y^2 + yz$$

Donc : $\mathrm{xz + xy} + y^2 + yz \geq 2$

$$\Rightarrow \mathrm{x(z + y) + y(z + y)} \geq 2$$

D'où : $\mathrm{(x + y)(y + z)} \geq 2$

Problème 9 :

On a : $\forall\, x , y , z > 0$

D'après l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} \geq \frac{(y + z + x + z + x + y)^2}{x + x + y + y + z + z}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{x^2+z^2}{y} + \frac{x^2+y^2}{z} \geq \frac{(2(x + y + z))^2}{2(x + y + z)}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{x^2+z^2}{y} + \frac{x^2+y^2}{z} \geq \frac{4(x + y + z)^2}{2(x + y + z)}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{x^2+z^2}{y} + \frac{x^2+y^2}{z} \geq 2(\mathrm{x + y + z})$$

D'où le résultat .

Problème 10 :

Soit $\vec{U}(-a\ ;\ b)$ et $\vec{V}(\mathrm{b}-d\ ; a-c)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$

Donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\|\vec{U}\|^2 \times \|\vec{V}\|^2 \geq \ |\vec{U}.\vec{V}|^2$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)((b-d)^2 +(a-c)^2) \geq (-a(b-d)+b(a-c))^2$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)((b-d)^2+(a-c)^2) \geq (-ab+ad+ab-bc)^2$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)((b-d)^2+(a-c)^2) \geq (ad-bc)^2$$

$$\Rightarrow (a-c)^2+(b-d)^2 \ \geq \frac{(ad-bc)^2}{a^2+b^2}$$

D'où le résultat .

Problème 11 :

Montrons par récurrence sur n :

<u>Initialisation</u> : Pour $\mathrm{n}=0$ l'inégalité est évidente .

<u>Hérédité :</u> montrons que :

$$(\frac{n+1}{2})^n \geq n! \ \Rightarrow (\frac{n+2}{2})^{n+1} \geq (n+1)!$$

On a : $(\frac{n+1}{2})^n \geq n! \ \Rightarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \geq \ (n+1)!$

D'après l'inégalité de Bernoulli on a $\forall$ n $\in \mathbb{N}$:

$$(1+\frac{1}{1+n})^{n+1} \geq 1+(\mathrm{n}+1)\times\frac{1}{1+n}=2$$

$$\Rightarrow \ (\frac{n+2}{n+1})^{n+1} \geq \ 2 \Rightarrow \ (n+2)^{n+1} \ \geq \ 2(n+1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{\,n+1}} \geq \frac{2(n+1)^{n+1}}{2^{\,n+1}} \Rightarrow (\frac{n+2}{2})^{n+1} \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} \geq (n+1)!$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \geq (n+1)!$$

<u>Conclusion :</u> d'après le principe de récurrence simple on a démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n} \geq n!$$

Problème 12 :

<u>Changement de variables :</u> puisque a , b , c sont des réels strictement positifs on peut alors supposer que :

$$a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y} \; et \; c = \frac{1}{z} \; avec \; x, y, z > 0 \; et \; xyz = 1$$

d'après l'inégalité des mauvaises élèves on a :

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 \times 1}{y+z} + \frac{y^2 \times 1}{x+z} + \frac{z^2 \times 1}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3yz}{y+z} + \frac{y^3xz}{x+z} + \frac{xyz^3}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{y^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{y^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Problème 13 :

$\forall$ a, b , c > 0 on a :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} = \frac{2a}{(b+c)+(b+c)}+\frac{2b}{(a+c)+(a+c)}+\frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$

On a : a + b > c ; $b + c > a$ et $a +$ c > b

$\Rightarrow$ (a + b)+(a + b) > $a + b + c$; (b + c)+(b + c)> $a + b + c$

et (a + c)+(a + c)> $a + b + c$

$$\Rightarrow \frac{2a}{2(b+c)} < \frac{2a}{a+b+c} ; \frac{2b}{2(a+c)} < \frac{2b}{a+b+c} ; \frac{2c}{2(a+b)} < \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

D'où : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} < 2$

Problème 14 :

$\forall$ a , b , c > 0 $on\ a$: $\frac{a^4+b^4+c^4}{abc} = \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}$

On appliquons la lemme de tourniquet on obtienne :

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab} \geq \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a^4+b^4+c^4}{abc} \geq \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}$$

Encore Appliquons la lemme de tourniquet :

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b} \geq a+b+c$$

D'où : $\frac{a^4+b^4+c^4}{abc} \geq a+b+c$

Problème 15 :

D'après la lemme de tourniquet on a ∀ x , y , z ≥ 0 :

$$(6x+1)+(6y+1)+(6z+1) \geq$$

$$\sqrt{6x+1}\times\sqrt{6y+1}+\sqrt{6y+1}\times\sqrt{6z+1} + \sqrt{6z+1}\times\sqrt{6x+1}$$

$$\Rightarrow\ 2((6x+1)+(6y+1)+(6z+1)) \geq$$

$$2\sqrt{6x+1}\times\sqrt{6y+1}+2\sqrt{6y+1}\times\sqrt{6z+1} + 2\sqrt{6z+1}\times\sqrt{6x+1}$$

$$\Rightarrow 3((6x+1)+(6y+1)+(6z+1)) \geq (\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3(6(x+y+z)+3)} \geq\ \sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3} \geq \sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}$$

D'où le résultat .

Problème 16 :

étudions le signe de $(x^4-6x^3+9x^2-4x)$ sur l'intervalle

]0 ; 3[cela conduit a étudier le signe de (x^3-6x^2+9x-4)

Sur l'intervalle]0 ; 3[.

On pose : $f(x) = x^3-6x^2+9x-4$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2-12x+9$$

Résoudrons : $3x^2-12x+9=0$

$$\Rightarrow \Delta = \ 36\ = 6^2 > 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

X	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f ’(x)		$+$		$-$		$+$	
Variation de f	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Donc d’après le tableau de variation de f on conclue que :

$\forall x \in]0\,;3[\ :\ x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \leq 0$

$\Rightarrow \forall x \in]0\,;3[\ : x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x \leq 0$

$\Rightarrow \forall x \in]0\,;3[: 4x \geq x^2(9 - 6x + x^2)$

$\Rightarrow \forall x \in]0\,;3[: (2\sqrt{x})^2 \ \geq\ x^2 \times (3 - x)^2$

$\Rightarrow \forall x \in]0\,;3[\ : 2\sqrt{x} \geq x(3 - x)$

$\Rightarrow \forall x \in]0\,;3[\ : \dfrac{\sqrt{x}}{3 - x} \geq \dfrac{x}{2}$

On a x , y , z > 0 et x + y + z = 3

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{3-x} + \frac{\sqrt{y}}{3-y} + \frac{\sqrt{z}}{3-z} \ \geq\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

On a : $x + y + z = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = y + z \\ 3 - y = x + z \\ 3 - z = x + y \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{y + z} + \frac{\sqrt{y}}{x + z} + \frac{\sqrt{z}}{x + y} \geq \frac{x + y + z}{2}$$

D’où : $\dfrac{\sqrt{x}}{y + z} + \dfrac{\sqrt{y}}{x + z} + \dfrac{\sqrt{z}}{x + y} \geq \dfrac{3}{2}$

Problème 17 :

On a : $x + y + z = 3$

$$\Rightarrow 3(x + y + z) = (x + y + z)^2$$

$$\Rightarrow 3(x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\Rightarrow xy + yz + xz = \frac{1}{2}(3x - x^2 + 3y - y^2 + 3z - z^2)$$

On pose : $S = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - (xy + yz + xz)$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}((x^2 - 3x + 2\sqrt{x}) + (y^2 - 3y + 2\sqrt{y}) + (z^2 - 3z + 2\sqrt{z}))$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique on a :

$$\forall\, x , y , z \geq 0 : \begin{cases} \frac{x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \times \sqrt{x} \times \sqrt{x}} \\ \frac{y^2+\sqrt{y}+\sqrt{y}}{3} \geq \sqrt[3]{y^2 \times \sqrt{y} \times \sqrt{y}} \\ \frac{z^2+\sqrt{z}+\sqrt{z}}{3} \geq \sqrt[3]{z^2 \times \sqrt{z} \times \sqrt{z}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall\, x , y , z \geq 0 : \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{x} \geq 3x \\ y^2 + 2\sqrt{y} \geq 3y \\ z^2 + 2\sqrt{z} \geq 3z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall\, x , y , z \geq 0 : \begin{cases} x^2 - 3x + 2\sqrt{x} \geq 0 \\ y^2 - 3y + 2\sqrt{y} \geq 0 \\ z^2 - 3z + 2\sqrt{z} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 3x + 2\sqrt{x} + y^2 - 3y + 2\sqrt{y} + z^2 - 3z + 2\sqrt{z}\,) \geq 0$$

$$\Rightarrow S \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - (xy + yz + xz) \geq 0$$

D'où : $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + xz$

- Les solutions des problèmes de degré 3 :

Problème 1 :

$$\text{On a : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -2$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{z} = 3 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}}\right)^2 = 1 \; (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} > 1)$$

D'après l'inégalité de Cauchy_Schwarz

On a ∀ x , y , z > 1 :

$$\left(\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}}\right)^2\right)\left(\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 + \sqrt{z}^2\right) \geq$$

$$\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} \times \sqrt{x} + \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y}} \times \sqrt{y} + \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}} \times \sqrt{z}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 \times (x+y+z) \geq \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{y-1}$$

D'où le résultat .

Problème 2 :

On a $\forall$ a , b ≥ 1 :

$$(\sqrt{(a-1)(b-1)}-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(b-1) - 2\sqrt{(a-1)(b-1)} + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{ab} - \mathrm{a} - \mathrm{b} + 1 \geq 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1$$

$$\Rightarrow ab \geq a - 1 + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} + b - 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{ab} \geq \sqrt{a-1}^{\,2} + 2\sqrt{a-1} \times \sqrt{b-1} + \sqrt{b-1}^{\,2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{ab} \geq (\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$$

Par la même façons, on démontre que : $\forall$ ab + 1 ≥ 1 et

c ≥ 1, on posons que : x = ab + 1 et y = c on a déjà montrer

$$\sqrt{\mathrm{xy}} \geq \sqrt{\mathrm{x}-1} + \sqrt{\mathrm{y}-1}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{c(ab+1)} \geq \sqrt{c-1} + \sqrt{ab+1-1}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{c(ab+1)} \geq \sqrt{c-1} + \sqrt{ab}$$

On a : $\sqrt{ab} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{c-1} + \sqrt{ab} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$$

D'où : $\sqrt{c(ab+1)} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$

Problème 3 :

$$\text{On a : } x^4 - y^4 = x - y$$

$$\Rightarrow (x^2)^2 - (y^2)^2 = x - y$$

$$\Rightarrow (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x - y$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = (x - y)$$

$$\Rightarrow (x + y)(x^2 + y^2) = 1 \ \ (\text{car } x - y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \ x + y = \frac{1}{x^2+y^2}$$

D'après l'inégalité arithmético_géométrique on a :

$$x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$$

$$\Rightarrow 4x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 \geq 3x^4 + 3y^4 + 6x^2y^2$$

$$\Rightarrow 4(x^4 + y^4 + x^2y^2) \geq 3(x^4 + y^4 + 2x^2y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}(x^4 + y^4 + x^2y^2) \geq (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{1}{x^2+y^2} \geq \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4 + x^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}(x + y) \geq 1 \times \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4 + x^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}(x + y) \geq \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2} \times \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4 + x^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}(x + y) \geq \frac{(x^2)^2-(y^2)^2}{(x^2)^3-(y^2)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}(x + y) \geq \frac{x^4 - y^4}{x^6 - y^6}$$

$$\text{D'où : } \frac{4}{3}(x + y) \geq \frac{x - y}{x^6 - y^6}$$

Problème 4 :

On a : $x \geq y \geq z > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y \geq 0 \\ y - z \geq 0 \\ x - z \geq 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \frac{1}{z} \geq \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} \geq \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-y)(y-z)(x-z) \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2y - xyz - x^2z + xz^2 - xy^2 + y^2z + xyz - yz^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2y - x^2z + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2(y-z) + z^2(x-y) \geq -y^2(z-x)$$

$$\Rightarrow x^2(y-z) + z^2(x-y) \geq y^2(x-z)$$

On a : $x^2 > 0$ et $(y-z) \geq 0$ et $\frac{1}{z} \geq \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow x^2(y-z) \geq 0 \text{ et } \frac{1}{z} \geq \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(y-z)}{z} \geq \frac{x^2(y-z)}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(y-z)}{z} + \frac{z^2(x-y)}{y} \geq \frac{x^2(y-z)+z^2(x-z)}{y}$$

On a : $x^2(y-z) + z^2(x-y) \geq y^2(x-z) \geq 0$ et $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{x} > 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2(y-z)+z^2(x-z)}{y} \geq \frac{y^2(x-z)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(y-z)}{z} + \frac{z^2(x-y)}{y} \geq \frac{y^2(x-z)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2y}{z} - \frac{x^2z}{z} + \frac{z^2x}{y} - \frac{z^2y}{y} \geq \frac{y^2x}{x} - \frac{y^2z}{x}$$

D'où : $\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$

Problème 5 :

D'après l'inégalités arithmético_géométrique on a :

$$\forall\, a , b , c > 0 : \begin{cases} 1 + ab^2 \geq 2\sqrt{1 \times ab^2} \\ 1 + bc^2 \geq 2\sqrt{1 \times bc^2} \\ 1 + ca^2 \geq 2\sqrt{1 \times ca^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1+ab^2}{c^3} \geq \frac{2b\sqrt{a}}{c^3} \\ \frac{1+bc^2}{a^3} \geq \frac{2c\sqrt{b}}{a^3} \\ \frac{1+ca^2}{b^3} \geq \frac{2a\sqrt{c}}{b^3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1+ab^2}{c^3} + \frac{1+bc^2}{a^3} + \frac{1+ca^2}{b^3} \geq \frac{2b\sqrt{a}}{c^3} + \frac{2c\sqrt{b}}{a^3} + \frac{2a\sqrt{c}}{b^3}$$

D'après l'inégalité des mauvaises élèves on a :

$$\frac{\sqrt{2b\sqrt{a}}^2}{c^3} + \frac{\sqrt{2c\sqrt{b}}^2}{a^3} + \frac{\sqrt{2a\sqrt{c}}^2}{b^3} \geq \frac{(\sqrt{2b\sqrt{a}}+\sqrt{2c\sqrt{b}}+\sqrt{2a\sqrt{c}})^2}{a^3+b^3+c^3}$$

$$\Rightarrow \frac{2b\sqrt{a}}{c^3} + \frac{2c\sqrt{b}}{a^3} + \frac{2a\sqrt{c}}{b^3} \geq \frac{(\sqrt{2b\sqrt{a}}+\sqrt{2c\sqrt{b}}+\sqrt{2a\sqrt{c}})^2}{a^3+b^3+c^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1+ab^2}{c^3} + \frac{1+bc^2}{a^3} + \frac{1+ca^2}{b^3} \geq \frac{(\sqrt{2b\sqrt{a}}+\sqrt{2c\sqrt{b}}+\sqrt{2a\sqrt{c}})^2}{a^3+b^3+c^3}$$

D'après l'inégalité arithmético_géométrique on a :

$$\sqrt{2b\sqrt{a}} + \sqrt{2c\sqrt{b}} + \sqrt{2a\sqrt{c}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{2b\sqrt{a} \times 2c\sqrt{b} \times 2a\sqrt{c}}}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2b\sqrt{a}} + \sqrt{2c\sqrt{b}} + \sqrt{2a\sqrt{c}})^2 \geq 9 \times (((2^3abc\sqrt{abc})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}})^2 = 9 \times 2^{3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{2b\sqrt{a}} + \sqrt{2c\sqrt{b}} + \sqrt{2a\sqrt{c}})^2}{a^3 + b^3 + c^3} \geq \frac{18}{a^3 + b^3 + c^3}$$

D'où : $\frac{1+ab^2}{c^3} + \frac{1+bc^2}{a^3} + \frac{1+ca^2}{b^3} \geq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}$

- Index des symboles :

$\geq$: supérieur ou bien égale

$\leq$: inférieur ou bien égale

$\overline{ou}$: la disjonction exclusive

ou : la disjonction inclusive

$\sqrt{x}$: la racine carré de x

n! : la factorielle de n

$\sqrt[n]{x}$: la racine n_iéme de x

$\sum p(x_i)$:la somme d'une expression

$\sum_{cyc} p(x_i)$: la somme cyclique de $p(x_i)$

$\prod p(x_i)$: le produit d'une expression

θ: theta (alphabet grec)

ε: epsilon (alphabet grec)

Δ: delta (alpabet grec)

σ: sigma (alphabet grec)

γ: gamma (alphabet grec)

φ: phi (alphabet grec)

$\forall$: quel que soit (universel)

$\Rightarrow$: implication logique

$\Leftrightarrow$: bi_implication logique