نظريات شكشك

نظريات في الهندسة الفراغية والمستوية

ابتكار

عاطف شكشك – هدى شكشك – أحمد شكشك

إهــــــداء

أهدى هذا الكتاب إلى زوجتى حيث لها الفضل فى توفير الجو المناسب لنا

لنستطيع تحقيق ما حققناه من إنجاز .

عاطف شكشك

أهدى كتابى هذا لوالدتى التى شملتنا برعايتها لتحقيق هذا الانجاز .

هدى شكشك

أهدى هذا الكتاب لوالدتى التى كانت دائما تشجعنا و تهيئ لنا كل سبل الهدوء و الجو

المناسب للتأمل و الابتكار .

أحمد شكشك

الباب الأول
نظريات الباحث أحمد شكشك

نبذة عن الباحث

ولد أحمد شكشك بمدينة القليوبية بجمهورية مصر العربية ودرس فى المراحل الابتدائية والاعدادية والثانوية بالمدارس الحكومية المصرية ثم التحق بكلية الإعلام وقد وضع أول نظرية له وهى نظرية نقاط المضلع وكان ذلك فى أكتوبر عام ٢٠١٤ حينئذ كان فى الصف الاول الثانوى وقبل إتمام المرحلة الثانوية وصل عدد النظريات له إلى ٧ نظريات و تتالت النظريات فى المرحلة الجامعية إلى أن وصل العدد إلى ١٠ نظريات .

كما ابتكر عدد من أجهزة القياس منهم جهاز يقيس زاوية سقوط أشعة الشمس على الارض وآخر يقيس زاوية ميل الاسطح المائلة وجهاز آخر ينتج غاز ثانى أكسيد الكربون المستخدم فى مزارع الفطريات التى تنتج بعض أنواع من الادوية.

نظرية نقاط المضلع

في أي مضلع هندسي منتظم طول ضلعه L وعدد أضلاعه n يكون مجموع أبعاد أي نقطة تنتمي للمضلع عن أضلاعه يساوى مقدار ثابت =

$$\frac{1}{2}\ L\, n \cot an\ \left(\frac{180}{n}\right)$$

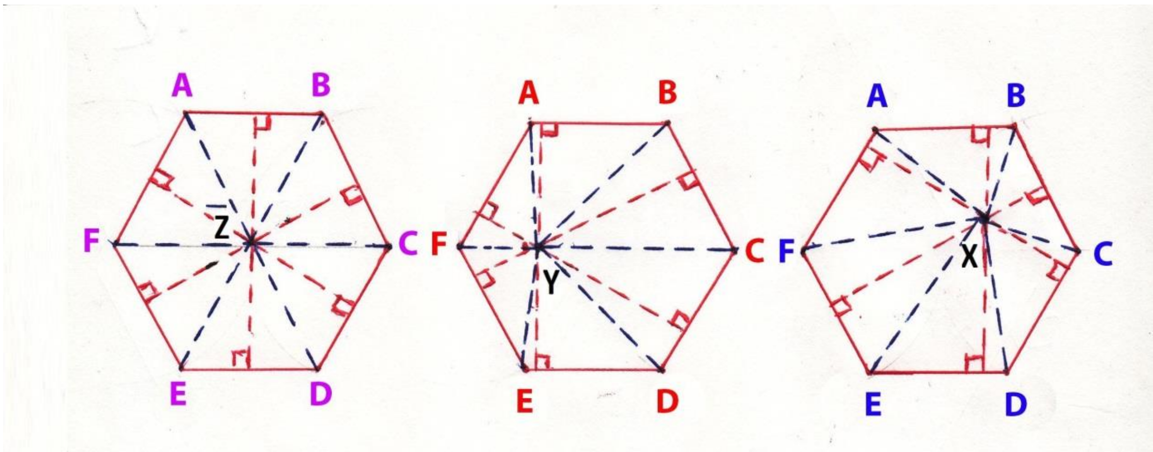


Fig (C)   Fig (B)   Fig (A)

* المعطيات :

في كل من الثلاث أشكال السابقة يكون A B C D E F مضلع هندسي منتظم عدد أضلاعه n ، y , x نقطتين داخله ، $\overline{Z}$ هي مركزة وطول ضلعه L .

* المطلوب :

إثبات أن كل من النقاط $\overline{Z}$ و Y و X يكون مجموع أبعاد أي منهم عن أضلاع المضلع يساوى مقدار ثابت

$$= \frac{1}{2}\ L\ n\ \ \cot an\ \frac{180}{n}$$

* العمل :

- في الأشكال الثلاثة نصل كل من النقاط $\bar{Z}$ و Y و X برؤوس المضلع B , A ، F , E , D , C

- ثم نسقط الأعمدة من X في Fig (A) علي أضلاع المضلع فتكون هي X_6 , X_5 , X_4 , X_3 , X_2 , X_1 .

- ثم نسقط الأعمدة من Y في Fig (B) علي أضلاع المضلع فتكون هي Y_6 , Y_5 , Y_4 , Y_3 , Y_2 , Y_1 .

- ثم نسقط الأعمدة من $\bar{Z}$ في Fig (C) علي أضلاع المضلع فتكون هي Z_6 , Z_5 , Z_4 , Z_3 , Z_2 , Z_1 .

* البرهان :

في Fig (A) ينقسم المضلع إلي n من المثلثات.

∴ مساحة المضلع =

$$= \Delta XAB + \Delta XBC + \Delta XCD + \Delta XDE + \Delta XEF + \Delta XFA =$$

$$= \frac{1}{2} LX_1 + \frac{1}{2} LX_2 + \frac{1}{2} LX_3 + \frac{1}{2} LX_4 + \frac{1}{2} LX_5 + \frac{1}{2} LX_6 =$$

$$= \frac{1}{2} L\,(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

- كما برهنا في Fig (A) نجد في Fig (B) أن مساحة المضلع =

$$= \frac{1}{2} L\,(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

* أيضا كما برهنا في Fig (A) نجد في Fig (C) أن مساحة المضلع =

$$= \frac{1}{2} L\,(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

من (1) و (2) و (3) نجد أن :

$$(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6) =$$
$$(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6) =$$
$$(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6) =$$

أي أن مجموع أبعاد أي نقطة تنتمي إلي المضلع عن أضلاعه = مقدار ثابت ولإيجاد هذا المقدار الثابت ننظر إلي Fig (C) بما أن $\bar{Z}$ هي مركز المضلع الهندسي المنتظم

$$\therefore\ Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = Z_6 = Z$$

∴ مساحة المضلع $= \frac{1}{2} L\, Z \,.\, n$

ولكن في المثلث $\Delta\, A\bar{Z}B$ نجد أن البعد Z بقسمه إلي مثلثين متطابقين لذلك

$$\angle A\bar{Z}R = \frac{1}{2} \angle A\bar{Z}B$$

$$\text{But}, \quad \angle A\bar{Z}B = \frac{360}{n}$$

$$\therefore \quad \angle A\bar{Z}R = \frac{180}{n}$$

$$\text{But} \quad Z = \frac{1}{2} L \cot an \frac{180}{n}$$

∴ مساحة المضلع =

$$= \frac{1}{2} L\, n \times \frac{1}{2} L \cot an \frac{180}{n}$$

$$= \frac{1}{4} L^2\, n \cot an \frac{180}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

من (2) ، (4) نستنتج أن :

$$\frac{1}{4} L^2 n \cot an \frac{180}{n} = \left(\text{مجموع الأبعاد}\right) \frac{1}{2} L$$

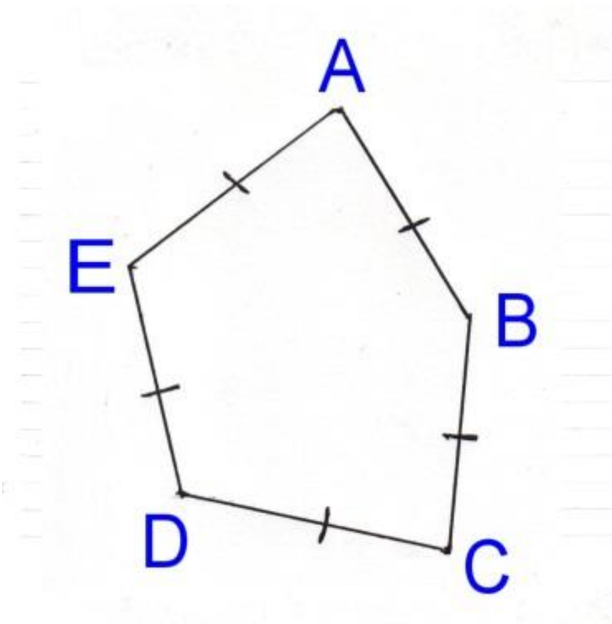
بالقسمة علي $\frac{1}{2}$ L ينتج أن :

$$\left(\text{مجموع الأبعاد}\right) = \frac{1}{2}\ L\,n\ \ \text{cotan}\ \frac{180}{n}$$

وهو المطلوب إثباته .

نتيجة ١

في أي مضلع متساوى الأضلاع بشرط جميع زواياه الداخلية كل منهم أقل من ١٨٠° يكون مجموع أبعاد أي نقطة تنتمي للمضلع عن أضلاعه = قيمة ثابتة .



نظرية نقاط الهرم

مجموع أبعاد أي نقطة تنتمي إلي هرم ثلاثي منتظم عن أوجه تساوى قيمة ثابتة .

$$= \sqrt{2/3}\ L$$

حيث : **L** هو طول حرف الهر م ، أي تساوى ارتفاع الهرم .

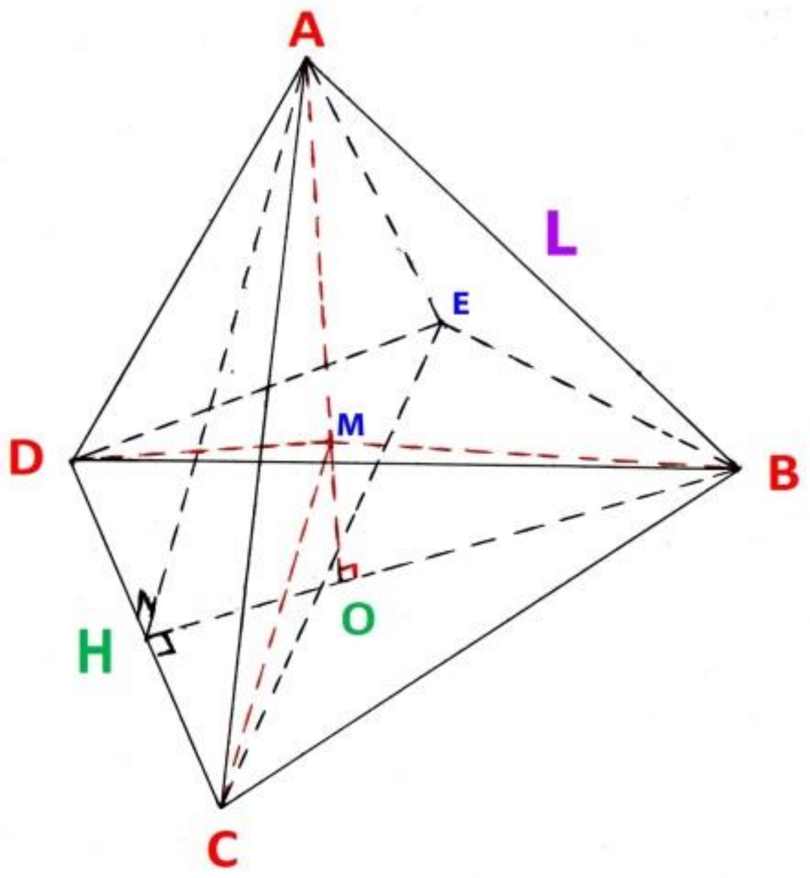


Fig (A)

*المعطيات:

A B C D هرم ثلاثي منتظم طول حرفه = **L** ، **E** نقطة داخل الهرم ، **M** هي مركز الهرم .

* المطلوب : إثبات أن مجموع أبعاد أي نقطة تنتمي إلي الهرم عن أوجهه = قيمة ثابتة = ارتفاع الهرم = $L \sqrt{\frac{2}{3}}$.

* العمل :

نسقط العمود $AH \perp CD$ ، فتكون H منتصف CD ثم نصل BH فيكون $BH \perp CD$ ثم نسقط العمود AO علي المستوى BCD فتكون O هي نقطة تقاطع المتوسطات للمثلث BCD الذي هو قاعدة الهرم كما هو معروف من قبل .

∴ O تقع علي BH وتقسمه بنسبة 1 : 2 من جهة الرأس B علي الترتيب .

$$\therefore \; OH = \frac{1}{2} BO = \frac{1}{3} BH$$

* البرهان :

جميع أوجه الهرم الثلاثي المنتظم تكون مثلثات متساوية الأضلاع ومتطابقة وهذا يؤدي إلي أن تكون متوسطات الأوجه تكون متساوية

$$\text{i.e.} \qquad BH = AH$$

(متوسطات في مثلثان متساويان الأضلاع ومنطبقان) .

$$\therefore \; OH = \frac{1}{3} AH$$

* $\Delta\, AHD$ قائم الزاوية في $\angle AHD$

So :

$$(AH)^2 = L^2 - \frac{1}{4} L^2 = \frac{3}{4} L^2$$

$$\therefore \; AH = \frac{\sqrt{3}}{2} L \quad ,$$

$$OH = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} AH =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} L = \frac{1}{2\sqrt{3}} L$$

$$\therefore (OH)^2 = \frac{1}{12} L^2$$

، في ΔAOH القائم في الزاوية في $\angle AOH$ يكون :

$$(AO)^2 = (AH)^2 - (OH)^2 = \frac{3}{4} L^2 - \frac{1}{12} L^2 =$$

$$= \frac{9}{12} L^2 - \frac{1}{12} L^2 = \frac{8}{12} L^2$$

وهو ارتفاع الهرم $\therefore AO = \sqrt{\frac{2}{3}} L$

$\therefore$ حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ القاعدة $\times L \sqrt{\frac{2}{3}}$ .... (١)

حيث أن القاعدة هي أي وجه في الهرم .

* نفرض أن E نقطة تنتمي للهرم ثم نصل E برؤوس الهرم فيتكون بذلك 4 أهرامات هم كالأتي : EBCD , EADB , EACD , EABC

* نفرض أن النقطة E علي أبعاد من أوجه الهرم بالترتيب هم E_1 , E_2 , E_3 , E_4 .

* أيضاً كما نصل مركز الهرم M برؤوس الهرم فيكون 4 أهرامات هم بالترتيب : MBCD , MADB , MACD , MABC .

* كما نفرض أن النقطة M علي أبعاد من أوجه الهرم بالترتيب هم M_1 , M_2 , M_3 , M_4

$\therefore$ مجموع حجوم أهرامات النقطة E =

$= \frac{1}{3}$ القاعدة $(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$ ……… (2)

* أيضا مجموع حجوم أهرامات النقطة M =

$= \frac{1}{3}$ القاعدة $(M_1 + M_2 + M_3 + M_4)$ ………… (3)

From (1) , (2) & (3), we result that :

$$(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) = (M_1 + M_2 + M_3 + M_4) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, L$$

N.B :

ارتفاع الهرم $M_1 = M_2 = M_3 = M = \frac{1}{4}$

أي أنه مجموع أبعاد أي نقطة تنتمي لهرم ثلاثي منتظم عن أوجه = ارتفاع الهرم = $\sqrt{\frac{2}{3}}\, L$

That is the prove

نتيجة (١)

(مجموع أبعاد أي نقطة تنتمي إلي مكعب عن أوجهه تساوى قيمة ثابتة = $3L$ حيث L هي طول حرف المكعب) .

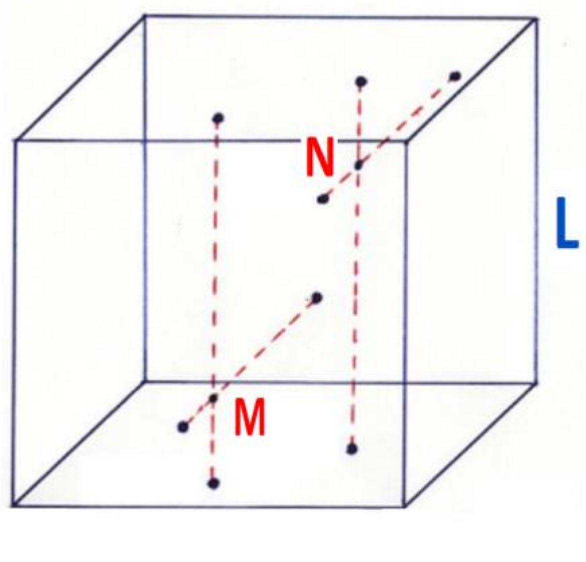


Fig (B)

* المعطيات : مكعب طول ضلعه L ، M , N نقطتين داخل المكعب .

* المطلوب :

إثبات أن مجموع أبعاد أي نقطة تنتمي للمكعب عن أوجهه تساوى قيمة ثابتة .

* العمل :

نفرض نقطتين M , N تنتمي إلي المكعب ثم نصل M , N برؤوس المكعب الثمانية فيشأ من توصيل M برؤوس المكعب **6** أهرامات رأس كل منهم هي النقطة M ، كما ينشأ عن توصيل النقطة N برؤوس المكعب **6** أهرامات ويكون رأس كل منهم هي النقطة N .

* البرهان :

نفرض أن أبعاد النقطة M من الأوجه الستة للمكعب هي ($M_1 , M_2 , \ldots\ldots , M_6$) وهي الارتفاعات الستة للأهرامات .

* أيضاً نفرض أن أبعاد النقطة N عن الأوجه هي $(N_1 , N_2 , \ldots\ldots , N_6)$.

* نفرض أن مساحة الوجه الواحد للمكعب هي A ، حيث أن الستة أوجه متطابقة فيكون :

$$\text{حجم المكعب} = \frac{1}{3}\,AM_1 + \frac{1}{3}\,AM_2 + \cdots + \frac{1}{3}\,AM_6$$

$$= \frac{1}{3}\,A\,(M_1 + M_2 + \cdots + M_6) \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

حجم المكعب أيضاً $= \frac{1}{3} A \left(N_1 + N_2 + \cdots + N_6 \right) \qquad \ldots\ldots\ldots. (2)$

From (1) & (2) , it results that :

$$(N_1 + N_2 + \ldots\ldots\ldots + N_6) = (M_1 + M_2 + \ldots\ldots\ldots + M_6)$$

أي أن مجموع أبعاد أي نقطة تسمي للمكعب عن أوجهه = قيمة ثابتة

(وهو المطلوب إثباته)

نتيجة (٢) :

(مجموع أبعاد أي نقطة تنتمي إلى مجسم متعدد الأوجه المتطابقة عن أوجهه = قيمة ثابتة)

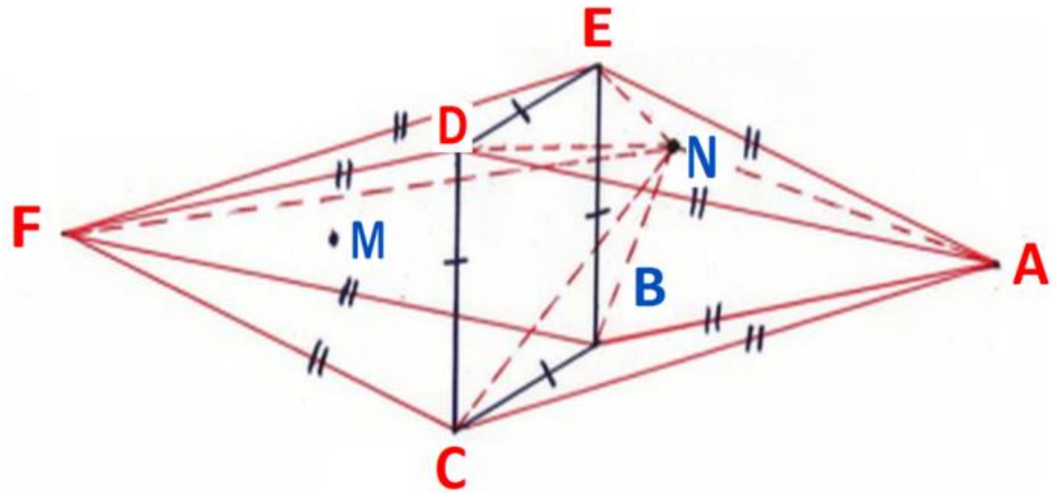


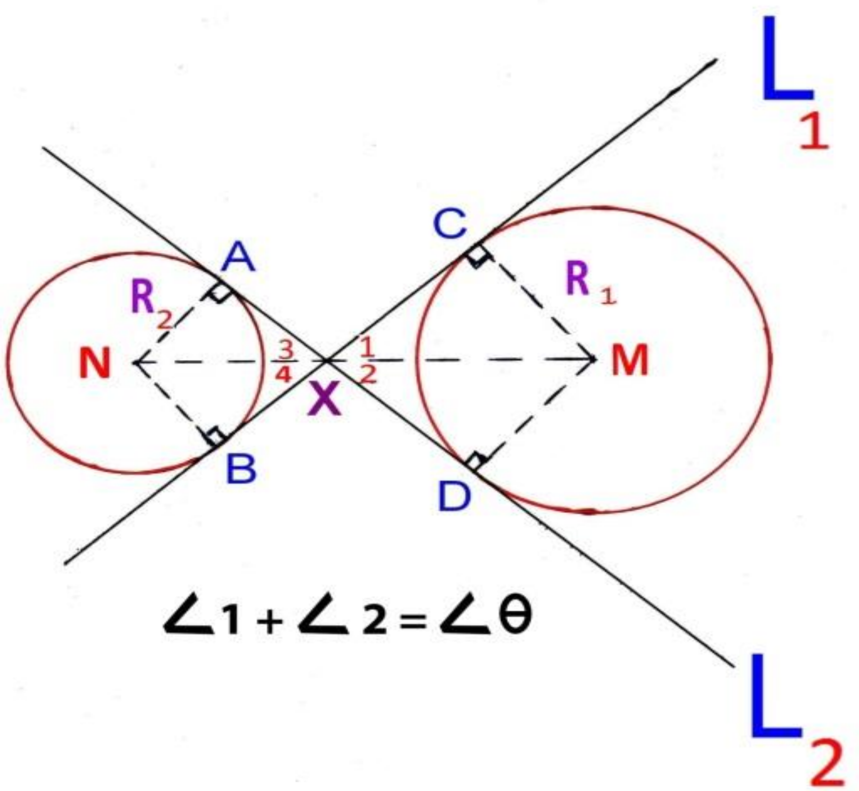
Fig (C)

نظرية دوائر المستقيمات المتقاطعة

المسافة بين مركزي دائرتين مماستين لمستقيمين متقاطعين وفي جهتين متقابلتين من التقاطع =

$$= \left(R_1 + R_2\right) \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}$$

حيث R_1 , R_2 هما أنصاف أقطار الدائرتين ، θ هي زاوية التقاطع من جهة الدائرتين .



* المعطيات :

L_2 , L_1 مستقيمان متقاطعان في النقطة X ، N , M دائرتان أنصاف أقطارها R_2 , R_1 علي الترتيب ويمسان المستقيمان L_2 , L_1 في

D , B , C , A علي الترتيب وفي جهتين متقابلتين من التقاطع ، θ هي زاوية التقاطع من جهة الدائرتين .

* المطلوب :

إثبات أن المسافة بين مركزي الدائرتين $N , M =$

$$= (R_1 + R_2)\ \text{cosec}\ \frac{\theta}{2}$$

* العمل :

نصل كل من MC و MD و MX و NA و NB و NX

* البرهان :

من تطابق ΔXMC و ΔXMD فيهما :

$MC = MD$, XM مشترك

$\angle\ XCM = \angle\ XDM = 90^o$

$\therefore$ ينطبق $\Delta\ \Delta$ وينتج أن $\angle\ MXC = \angle\ MXD$

أي أن $\angle\ \theta$ قد انقسمت إلي نصفين كل منهم $= \frac{\theta}{2}$

بالمثل $\angle\ NXA = \angle\ NXB$

i . e : $\angle(1) = \angle(2) = \angle(3) = \angle(4) = \frac{\theta}{2}$

$$\therefore\ \angle(1) + \angle(2) + \angle\ AXC = 180^o$$

$\therefore$ النقاط M , X , N علي استقامة واحدة .

$\therefore$ المسافة بين مركزي الدائرتين $N , M =$

$$= MX + NX = R_1\ \text{cosec}\ \frac{\theta}{2} + R_2\ \text{cosec}\ \frac{\theta}{2} =$$

$$= (R_1 + R_2)\ \text{cosec}\ \frac{\theta}{2}$$

وهو المطلوب إثباته

نظرية المضلعات المتناصفة

تمهيد:

كما هو واضح في **Fig (A)** إذا نصفت أضلاع مضلع هندسي منتظم *M* طول ضلعه **L** و عدد أضلاعه **n** ، وقد وصلنا بين نقاط التنصيف ، فإنه ينشأ مضلع هندسي منتظم M_{-1} له نفس المركز الهندسي ونفس عدد الأضلاع ولكن له طول ضلع أقل هو L_{-1} وبالمثل إذا حدث نفس الشئ للمضلع M_{-1} فإنه ينشأ المضلع M_{-2} أيضا له نفس المركز ونفس عدد الأضلاع **n** ولكن له طول ضلع أقل هو L_{-2} وهكذا الى المضلع M_{--N} الذى له نفس المركز الهندسي وله طول ضلع L_{-N} ،

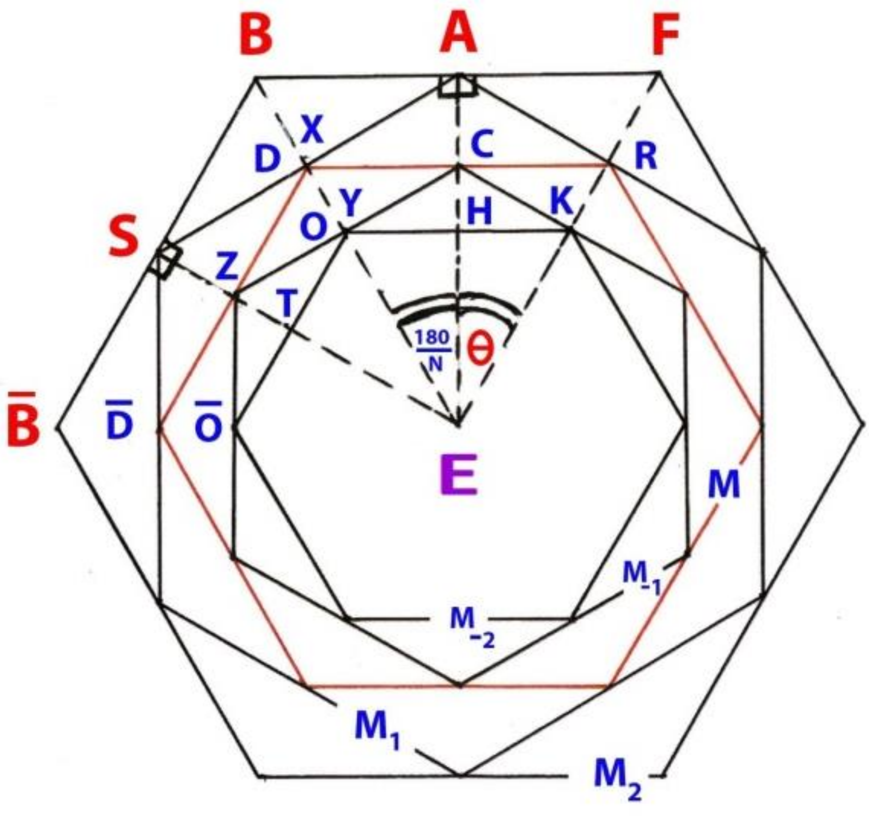


Fig (A)

وبالعكس فإن المضلع M ناشئ من تنصيف أضلاع المضلع M_1 الذي له نفس المركز ونفس عدد الأضلاع ولكن له طول ضلع أكبر هو L_1 وبالمثل المضلع M_1 ناشئ من تنصيف أضلاع مضلع أكبر هو M_2 ، وهكذا إلي المضلع M_N الذي طول ضلعه L_N وعدد أضلاع n . وهكذا ينشأ بما يسمي (خط شكشك للمضلعات المتناصفة) كما هو واضح في Fig (B) :

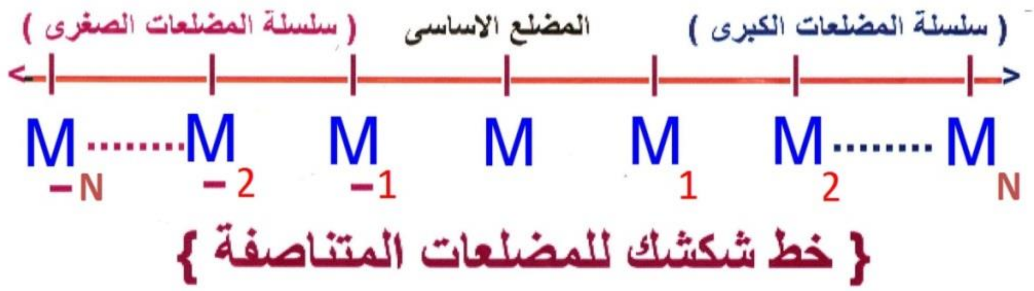


Fig (B)

* في Fig (A) :

المضلعات M_{-N} , ... , M_{-2} , M_{-1} , M , M_1 , M_2 , ...,

M_N لهم أطوال أضلاع علي الترتيب L_{-N} , ..., L_{-2} , L_{-1} , L , L_1 , L_2 , ..., L_N ولهم نفس المركز ونفس عدد الأضلاع n .

منطوق النظرية

إذا نصفت أضلاع مضلع هندسي منتظم M ووصلت نقاط التنصيف فإنه ينشأ مضلع هندسي منتظم M_{-1} يشترك مع المضلع M في المركز وله نفس عدد الأضلاع n ولكن له طول ضلع أصغر هو L_{-1} ، وإذا حدث نفس الشئ السابق للمضلع M_{-1} فسينتج المضلع M_{-2} وهكذا إلي المضلع M_{-N} ، وبذلك تنشأ (سلسلة المضلعات الصغرى) كما في Fig (A) ، وبالعكس المضلع M ناشئ من تنصيف أضلاع المضلع M_1 وهكذا .... إلي M_N وبذلك تنشأ (سلسلة المضلعات الكبرى) ويكون :

$$L_N = L \sec^N \left(\frac{180}{n}\right)$$

$$L_{-N} = L \operatorname{cosin}^N \left(\frac{180}{n}\right)$$

حيث :

L هو طول ضلع المضلع الأساس M

L_N هو طول ضلع المضلع الأساسي M_N

L_{-N} هو طول ضلع المضلع الأساسي M_{-N}

n هي عدد أضلاع المضلع الأساسي

N هي رقم المضلع في (سلسلة المضلعات الكبرى) ابتداء من المضلع M_1 .

$-N$ هي رقم المضلع في (سلسلة المضلعات الصغرى) ابتداء من المضلع M_{-1}

* المعطيات :

كما في Fig (A) كل من المضلعات M_2 , M_1 , M , M_{-1} , M_{-2} مضلعات هندسية منتظمة ومشتركة في المركز الهندسي E وعدد أضلاع كل

منهم هو **n** بحيث رؤوس المضلع M_{-2} تنصف أضلاع المضلع M_{-1} ، رؤوس المضلع M_{-1} تنصف أضلاع المضلع **M** ، رؤوس أضلاع المضلع **M** تنصف أضلاع المضلع M_1 ، رؤوس المضلع M_1 تنصف أضلاع المضلع M_2 ويكون :

المضلع الأساسي **M** طول ضلعه **L**

المضلع الأساسي M_1 طول ضلعه L_1

المضلع الأساسي M_2 طول ضلعه L_2

المضلع الأساسي M_N طول ضلعه L_N

المضلع M_{-1} طول ضلعه L_{-1}

المضلع M_{-2} طول ضلعه L_{-2}

المضلع M_{-N} طول ضلعه L_{-N}

* المطلوب : إثبات أن :

$$* \; L_N = L\sec^N\left(\frac{180}{n}\right) \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$* \; L_{-N} = L\,cosin^N\left(\frac{180}{n}\right) \ldots\ldots\ldots.(2)$$

* العمل :

– نسقط العمود $BF \perp EA$ في **A** ويقع **DR** في **C** ويقطع **OK** في **H** .

– نسقط العمود $B\bar{B} \perp ES$ في **S** ويقطع $D\bar{D}$ في **Z** ويقطع $O\bar{O}$ في **T** .

– نصل كل من **EK** , **ER** , **EF** , **EO** , **ED** , **EB** .

* البرهان :

كما في Fig (A) :

* جميع القطع المستقيمة الواصلة بين مركز أي مضلع هندسي منتظم ورؤوسه تكون متساوية وتنصف زوايا رأس المضلع (حقيقة) .

* جميع الأعمدة الساقطة من مركز أي مضلع هندسي منتظم علي أضلاعه تكون متساوية وتنصف أضلاع المضلع (حقيقة) .

$$\because \ \angle \mathbf{FEB} = \left(\frac{360}{n}\right)$$

$$\therefore \ \angle \mathbf{AEB} = \left(\frac{180}{n}\right) = \theta$$

حيث **n** هي عدد أضلاع المضلع .

* أولاً نثبت أن النقاط **B , D , O , E** يكونوا علي استقامة واحدة وكذلك النقاط **F R K E**

* نفرض أن **BE** قطع **AS** في **X** .

* في المثلثان Δ **ABX** و Δ **SBX** فيهما :

(مشترك) **BX**

(أنصاف أضلاع المضلع M_2) و **AB = SB**

(أنصاف زوايا رأسية للمضلع M_2) و $\angle$ **ABX** = $\angle$ **SBX**

$\therefore$ ينطلق المثلثان وينتج أن : **AX = SX**

$\therefore$ **X** في منتصف **AS**

$\therefore$ **X** تنطبق على راس المضلع **M** ، أي تنطبق على الرأس **D**

∴ ED ينطبق على EB ...... (١)

- بالمثال نفرض أن ED قطع CZ في Y .

∴ في المثلثان Δ DCY و Δ DZY فيهما :

DY مشترك

DC = DZ و (أنصاف أضلاع في الضلع M)

∠ CDY = ∠ ZDY و (أنصاف زوايا رأسية في المضلع M)

∴ ينطبق المثلثان وينتج أن : CY = ZY

∴ Y تنطبق على O .

∴ EO ينطبق علي ED .... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن :

∴ EO ينطبق علي ED ينطبق علي EB .

∴ كل من النقاط B , D , O , E تقع علي استقامة واحدة .

* بنفس الطريقة يمكن إثبات أن كل من النقاط E , K , R , F تقع علي استقامة واحدة .

* < AFE = < CRE = < HKE

أنصاف زوايا رأسية في مضلعات منتظمة متشابها

∵ الثلاث زوايا متساوية وفي وضع تناظر

∴ FB // RD // KO

∴ EA عمودي علي كل من KO , RD , FB .

* بالمثل ES عمودي علي كل من $O\bar{O}$, $D\bar{D}$, $B\bar{B}$

* ثانياً البرهان :

$$DE = CD \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{2} L \operatorname{cosec} \theta$$

$$, \quad AD = DE \tan \theta = \frac{1}{2} L \operatorname{cosec} \theta \tan \theta$$

$$= \frac{1}{2} L \left(\frac{1}{\sin \theta}\right)\left(\frac{\sin \theta}{\operatorname{cosin} \theta}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} L \left(\frac{1}{\operatorname{cosin} \theta}\right) = \frac{1}{2} L \sec \theta$$

$$\therefore L_1 = 2\,AD = L \sec \theta \qquad \ldots . \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$AE = AD \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{2} L \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

But : $AB = AD \tan \theta$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} L \sec \theta \operatorname{cosec} \theta \tan \theta$$

But : $L_2 = 2\,AB$

$$\therefore L_2 = 2 \times \frac{1}{2} L \sec \theta \operatorname{cosec} \theta \left(\frac{\sin \theta}{\operatorname{cosin} \theta}\right)$$

$$= L \sec \theta \operatorname{cosec} \theta . \left(\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}\right)(\sec \theta)$$

$$\therefore L_2 = L \sec^2 \theta \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots . (4)$$

From (3) and (4) , we result that :

$$L_N = L \sec^N \left(\frac{180}{n}\right)$$

وهو المطلوب أولاً

$$* \qquad CE = CD \operatorname{cotan} \theta = \frac{1}{2} L \operatorname{cotan} \theta$$

$$, \quad CO = CE \sin \theta = \frac{1}{2} L \operatorname{cotan} \theta \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} L \left(\frac{\operatorname{cosin} \theta}{\sin \theta}\right) \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} L \operatorname{cosin} \theta$$

$$\therefore L_1 = 2\ CO = L\ \text{cosin}\ \theta \qquad \dots \dots . (5)$$

- $OE = CO\ \text{cotan}\ \theta = \frac{1}{2} L\ \text{cosin}\,\theta\ \text{cotan}\,\theta$

$$, \ OH = OE\ \sin\theta = \frac{1}{2}\ L\ \text{cosin}\,\theta\ \ \text{cotan}\,\theta\ \ \sin\theta$$

$$\therefore \quad OH = \frac{1}{2} L\ \text{cosin}^2\,\theta \quad ,$$

But : $L_{-2} = 2\ OH$

$$\therefore \quad L_{-2} = 2 \times \frac{1}{2}\ L\ \text{cosin}^2\ \theta$$

$$\therefore \quad L_{-2} = L\ \text{cosin}^2\,\theta \qquad \dots \dots \dots \dots \dots . (6).$$

من (5) و (6) نستنتج أن :

$$L_{-N} = L\ \text{cosin}^N\ \theta$$

وهو المطلوب ثانياً

نظرية مضلعات الدوائر

إذا اشتركت عدة مضلعات هندسية منتظمة ومتشابهة في مركز واحد ، بحيث توجد دائرة بين كل مضلع والذي يليه ، بحيث تمس رؤوس مضلع وفي نفس الوقت تمس أضلاع المضلع الذي يليه، فإذ اعتبرنا المضلع **M** هو المضلع الأساسي الذي طول ضلعه **L** وعدد أضلاعه **n** فإن :

$$L_N = L\ \sec^N\left(\frac{180}{n}\right) \quad , \quad L_{-N} = L\ \operatorname{cosin}^N\left(\frac{180}{n}\right)$$

حيث :

* **n** هي عدد أضلاع أي مضلع .

* **N** هي رقم المضلع في سلسلة المضلعات الكبرى ابتداء من M_1 .

* **-N** هي رقم المضلع في سلسلة المضلعات الصغرى ابتداء من M_{-1} .

* **L** هو طول ضلع المضلع الأساسي **M** .

* L_N هو طول ضلع المضلع M_N .

* L_{-N} هو طول ضلع المضلع M_{-N} .

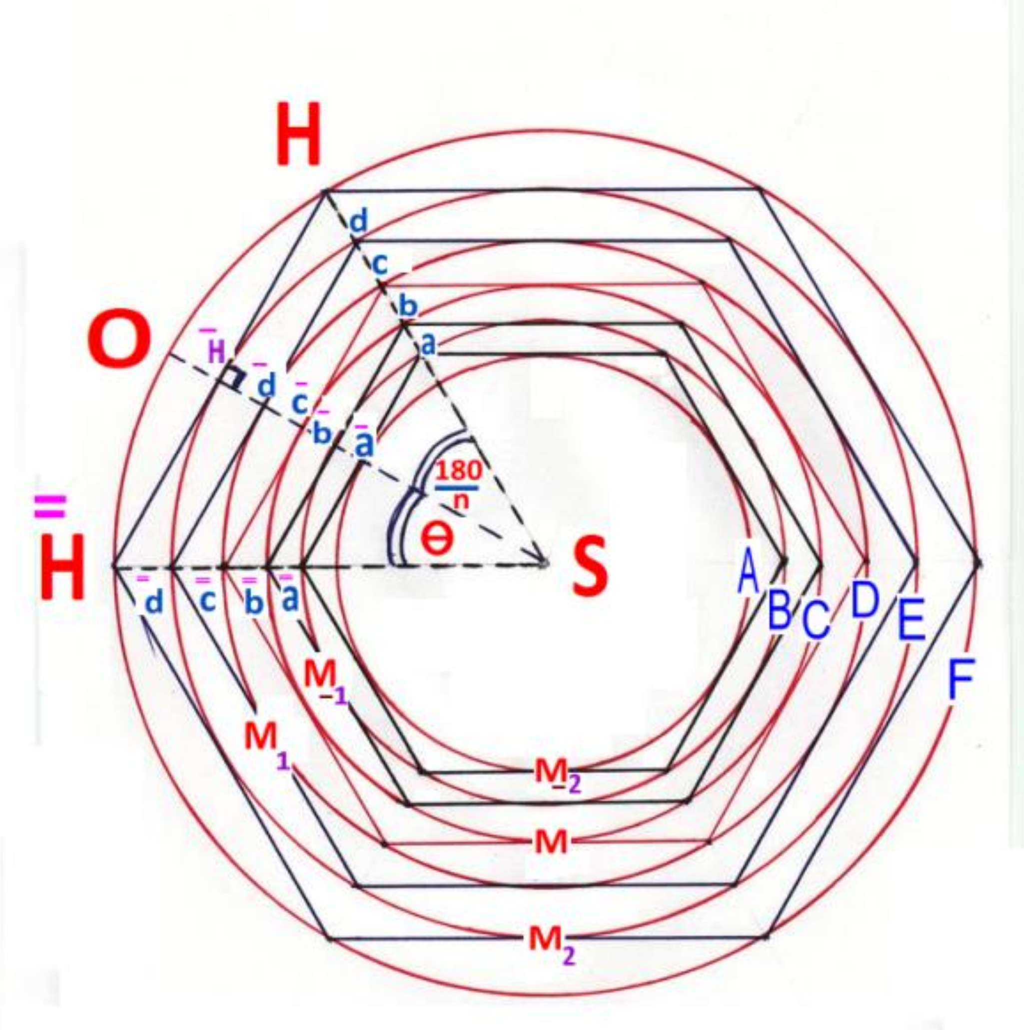


Fig (A)

{ خط شكشك لمضلعات الدوائر }

Fig (B)

* تمهيد :

كما في Fig (A) نجد عدد من المضلعات الهندسية المنتظمة والمتشابهة وعدد أضلاع كل منها هو $\mathbf{n}$.

وبين كل مضلع والذي يليه توجد دائرة بحيث تمس رؤوس مضلع وفي نفس الوقت تمس أضلاع المضلع الذي يليه من الخارج، وقد رتبت المضلعات من الداخل إلي الخارج هكذا.

$$M_{-N}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ M_{-2}\ ,\ M_{-1}\ ,\ M\ ,\ M_1\ ,\ M_2\ ,\ \ldots\ ,\ M_N$$

وأن أطوال أضلاعهم علي الترتيب هم :

$$L_{-N}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ L_{-2}\ ,\ L_{-1}\ ,\ L\ ,\ L_1\ ,\ L_2\ ,\ \ldots\ldots,\ L_N$$

وقد مثل ذلك كما في Fig (B) وهو (خط مضلعات الدوائر)

* وكما هو واضح في Fig (A) و Fig (B)

ففي Fig (A) نجد أن :

الدوائر من الداخل إلي الخارج هي :

A , B , C , D , E , F

$$*\qquad \angle\,HS\bar{\bar{H}} = \frac{360}{n}$$

$$\therefore\ \angle\,HSO = \frac{180}{n} = \theta$$

* المعطيات :

كما في Fig (A) $M_{-2}\ ,\ M_{-1}\ ,\ M\ ,\ M_1\ ,\ M_2$ هم خمس مضلعات هندسية منتظمة ومتشابهة وعدد أضلاع كل منهم $= \mathbf{n}$ وهي مرتبة من الداخل إلي الخارج ومشتركين في مركز واحد هو $\mathbf{S}$ بحيث توجد دائرة بين كل مضلع والذي يليه بحيث تقع رؤوس المضلع الداخلي على محيط الدائرة وفي

نفس الوقت يمس محيط الدائرة أضلاع المضلع الذي يليه من الخارج ، وأيضاً الدوائر المحصورة بين المضلعات مرتبة من الداخل إلي الخارج هكذا

A , B , C , D , E , F .

ولهم أنصاف أقطار هي $R_A , R_B , R_C , R_D , R_E , R_F$ كما أن أطوال أضلاع المضلعات علي الترتيب من المداخل إلي الخارج مرتبة هكذا L_{-2} , L_{-1} , L , L_1 , L_2

* المطلوب :

المطلوب إثبات أن

$$L_N = L \sec^N \theta \quad , \quad L_{-N} = L \operatorname{cosin}^N \theta$$

حيث : $\theta = 180/n$

* العمل :

١- نجعل رؤوس المضلعات a , b , c , d , H علي استقامة واحدة .

٢- نصل المركز S بكل من a , b , c , d , H حيث أنهم علي استقامة واحدة (عمليا) .

٣- نصل المركز S بكل من النقاط : $\bar{\bar{a}} , \bar{\bar{b}} , \bar{\bar{c}} , \bar{\bar{d}} , \bar{\bar{H}}$.

٤- نسقط العمود $S\bar{H} \perp H\bar{\bar{H}}$ فيقطع $a\bar{\bar{a}}$ في $\bar{a}$, $b\bar{\bar{b}}$ في $\bar{b}$, $c\bar{\bar{c}}$ في $\bar{c}$ و $d\bar{\bar{d}}$ في $\bar{d}$ ويلاقي الدائرة في O .

* البرهان :

$$\angle HS\bar{\bar{H}} = \angle ds\bar{\bar{d}} = \angle cs\bar{\bar{c}}$$

$$= \angle bs\bar{\bar{b}} = \angle as\bar{\bar{a}} = \frac{360}{n}$$

(زوايا مركزية لمضلعات متشابهة) .

$$\therefore \quad \angle HSO = \frac{180}{n} = \theta$$

وبما أن كل من Sh و Sd و SC و Sb و Sa منطبقين علي بعض (عملاً) .

∴ كل من $S\bar{\bar{H}}$, $S\bar{\bar{d}}$, $S\bar{\bar{c}}$, $S\bar{\bar{b}}$, $S\bar{\bar{a}}$ منطبقين على بعض .

∴ كل من النقاط S , $\bar{\bar{a}}$, $\bar{\bar{b}}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{d}}$, $\bar{\bar{H}}$ على استقامة واحدة .

$$\because \quad \angle SH\bar{\bar{H}} = \angle sd\bar{\bar{d}} = \angle Sc\bar{\bar{c}}$$

$$= \angle Sb\bar{\bar{b}} = \angle sa\bar{\bar{a}}$$

(زوايا القاعدة لمثلثات متساوية الساقين ومتشابهة)

وبما أن هذه الزوايا في وضع تناظر

$$\therefore \; H\bar{\bar{H}} // d\bar{\bar{d}} // C\bar{\bar{C}} // b\bar{\bar{b}} // a\bar{\bar{a}}$$

But $\quad S\bar{H} \perp H\bar{\bar{H}} \therefore s\bar{d} \perp d\bar{\bar{d}}$, $s\bar{c} \perp c\bar{\bar{c}}$

$$s\bar{b} \perp b\bar{\bar{b}} \, , \qquad s\bar{a} \perp a\bar{\bar{a}} \, .$$

نستنتج من السابق أن

$$H\bar{H} = \bar{H}\bar{\bar{H}} \, , \qquad d\bar{d} = \bar{d}\bar{\bar{d}} \, ,$$

$$c\bar{c} = \bar{c}\bar{\bar{c}} \, , \qquad b\bar{b} = \bar{b}\bar{\bar{b}} \, , \qquad a\bar{a} = \bar{a}\bar{\bar{a}}$$

* المضلع M طول ضلعه L .

* المضلع M_1 طول ضلعه L_1 .

$$* \; L_1 = 2d\bar{d} = 2R_D \; \tan\theta =$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} L \; \operatorname{cosec}\theta \; \tan\theta =$$

$$= L \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\operatorname{cosin}\theta}\right)$$

$$\therefore L_1 = L \; \sec\theta \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$* \quad L_2 = 2H\overline{H} = 2R_E \tan\theta =$$

$$= 2\, R_D \sec\theta \quad \tan\theta =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} L \ \mathrm{cosec}\,\theta \ \sec\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\mathrm{cosin}\,\theta}\right)$$

$$= L \ \mathrm{cosec}\,\theta \ \sec\theta \left(\frac{1}{\mathrm{cosce}\,\theta}\right) \sec\theta$$

$$\therefore \ L_2 = L \ \sec^2\theta \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

From (1) and (2) , we find that :

$$L_N = L \ \sec^N \frac{180}{n}$$

وهو المطلوب أولاً

$$* \quad L_{-1} = 2\, b\bar{\bar{b}} = 2\, R_c \ \sin\theta =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} L \ \mathrm{cotan}\,\theta \ \sin\theta\right) =$$

$$= L\left(\frac{\mathrm{cosin}\,\theta}{\sin\theta}\right) \sin\theta$$

$$\therefore L_{-1} = L \ \mathrm{cosin}\,\theta \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$* \quad L_{-2} = 2\, a\bar{a} = 2\, R_B \ \sin\theta =$$

$$= 2\, R_C \ \mathrm{cosin}\,\theta \ \sin\theta =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} L \ \mathrm{cotan}\,\theta \ \mathrm{cosin}\,\theta \ \sin\theta\right)$$

$$= L\left(\frac{\mathrm{cosin}\,\theta}{\sin\theta}\right) \mathrm{cosin}\,\theta \ \sin\theta$$

$$\therefore L_{-2} = L \ \mathrm{cosin}^2\,\theta \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

From (3) and (4) , we find that :

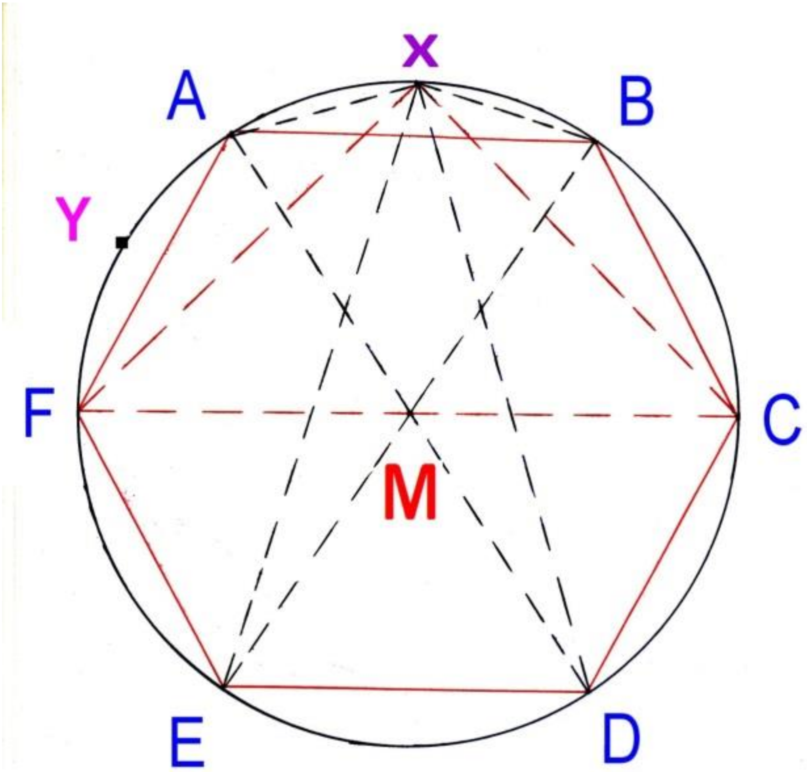
$$L_{-N} = L \ \mathrm{cosin}^N\,\theta = L\,\mathrm{cosin}^N\left(\frac{180}{n}\right)$$

وهو المطلوب ثانياً .

نظرية نقاط دائرة المضلع الزوجي

(في أي مضلع هندسي منتظم زوجي يكون :

مجموع مربعات أبعاد أي نقطة علي محيط دائرته الخارجية عن رؤوس المضلع = $2nR^2$ ، حيث **n** هي عدد أضلاع المضلع ، **R** هي نصف قطر دائرته الخارجية) .



* المعطيات :

A B C D E F مضلع هندسي منتظم عدد أضلاعة **n = 6** ، **x** نقطة علي محيط دائرته الخارجية ، **M** هي مركز المضلع وهي أيضاً مركز دائرته الخارجية التي طول نصف قطرها هو **R** .

* المطلوب :

إثبات أن مجموع مربعات أبعاد النقطة X عن رؤوس المضلع A B C D E F تساوى $2nR^2$

* العمل :

نصل كل من AD , BE , CF نجد أنهم يتقاطعوا في مركز المضلع الذي هو مركز دائرة المضلع .

ثم نصل النقطة X بكل من النقاط A , B , C , D , E , F .

* البرهان :

$\because$ زاوية $\angle AXD$ قائمة (مرسومة في نصل دائرة) .

$\therefore \quad (AX)^2 + (DX)^2 = (AD)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\because$ زاوية $\angle BXE$ قائمة (مرسومة في نصف دائرة) .

$\therefore \quad (BX)^2 + (EX)^2 = (BE)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$\because$ زاوية $\angle CXF$ قائمة (مرسومة في نصف دائرة) .

$\therefore \quad (XC)^2 + (FX)^2 = (CF)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

بجمع (1) و (2) و (3) نجد أن :

$$(AX)^2 + (DX)^2 + (BX)^2 + (EX)^2 + (CX)^2 + (FX)^2 =$$

$$(AD)^2 + (BE)^2 + (CF)^2 = 12R^2$$

أي أنه مجموع مربعات أبعاد النقطة X عن رؤوس المضلع $= 2NR^2$

* وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن النقطة Y

مجموع مربعات أبعادها عن رؤوس المضلع $= 2NR^2$

أي أنه مجموع مربعات الأبعاد لأي نقطة علي محيط دائرة المضلع الخارجية تساوى قيمة ثابتة $= 2NR^2$

وهو المطلوب إثباته .

نظرية مماسات الدائرتين

(إذا اشتركت دائرتان في المركز فإن جميع المماسات الآتية من نقاط علي محيط الدائرة الكبرى لتمس محبط الدائرة الصغرى تكون متساوية) .

* تمهيد :

بالنظر إلي Fig (A) :

إذا اعتبرنا دائرتان Y , X مشتركين في المركز M بحيث X < Y وكانت النقاط A , B , C , D , E تقع علي محيط الدائرة الكبرى Y ثم قمنا بعمل ماسات من تلك النقط لتمس محبط الدائرة الصغرى X فإن جميع هذه المماسات تكون متساوية .

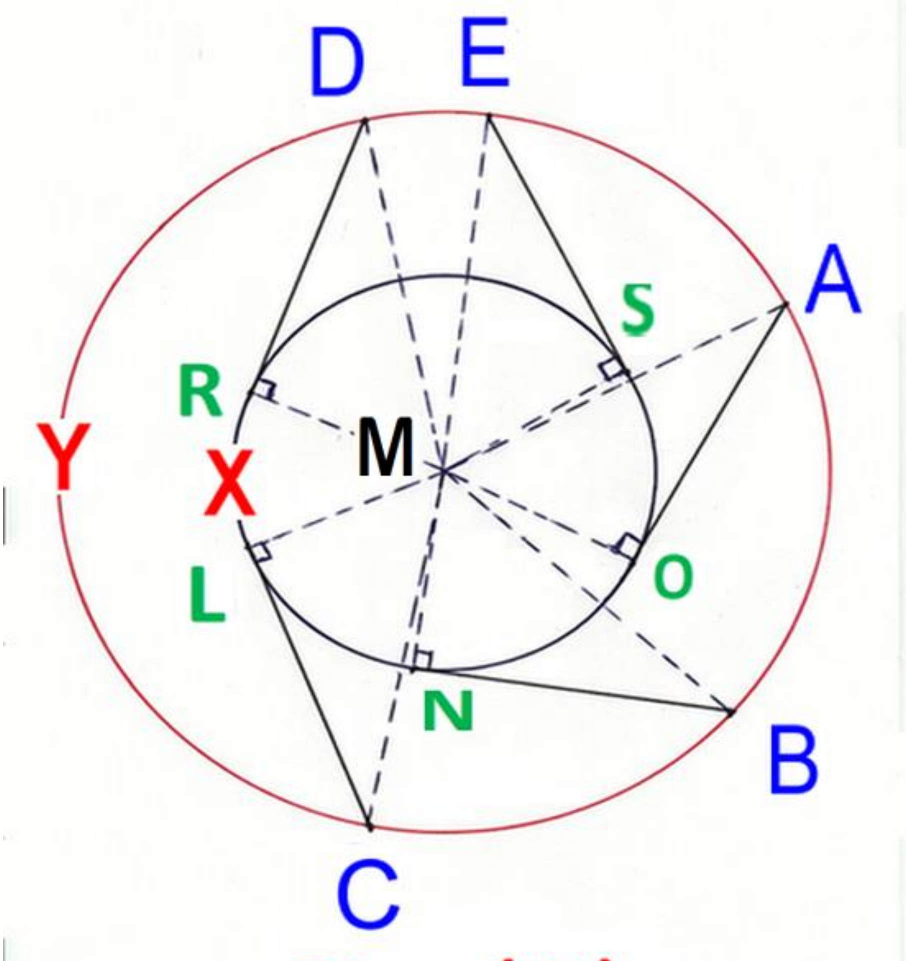


Fig (A)

* المعطيات :

في Fig (A) يكون X , Y دائرتان متحدتا المركز في M . بحيث X أصغر من Y ، كل من النقاط A , B , C , D , E

يقعوا جميعاً علي محيط الدائرة الكبرى Y ، كل من AO , BN , CL , DR , ES هم مماسات من نقاط علي محيط الدائرة الكبر ليمسوا محيط الدائرة الصغرى X في النقاط O , N , L , R , S علي الترتيب

* المطلوب :

إثبات أن AO = BN = CL = DR = ES

* العمل :

نصل النقطة M بكل من النقاط A , B , C , D , E , O , N, L , R , S

* البرهان :

في كل من المثلثات : AMO , BMN , CML , DMR , EMS نجد فيهم بالترتيب أن :

AM = BM = CM = DM = EM (أنصاف أقطار الدائرة Y) .

OM = NM = LM = RM = SM (أنصاف أقطار الدائرة X) .

و $\angle AOM = \angle BNM = \angle CLM = \angle DRM = \angle ESM = 90^{o}$

∴ جميع المثلثات الخمس منطبقة وينتج أن :

$$AO = BN = CL = DR = ES$$

أي أن جميع المماسات الأتية من نقاط علي محيط الدائرة الكبرى لتمس محيط الدائرة الصغرى تكون متساوية

وهو المطلوب إثباته

عكس نظرية مماسات الدائرتين

(القطع المستقيمة المتساوية الماسة من إحدى طرفيها دائرة واحدة، تقع جميع أطرافها الأخرى علي محيط دائرة واحدة ويكون مركزها هو نفس مركز الدائرة المتماسة) .

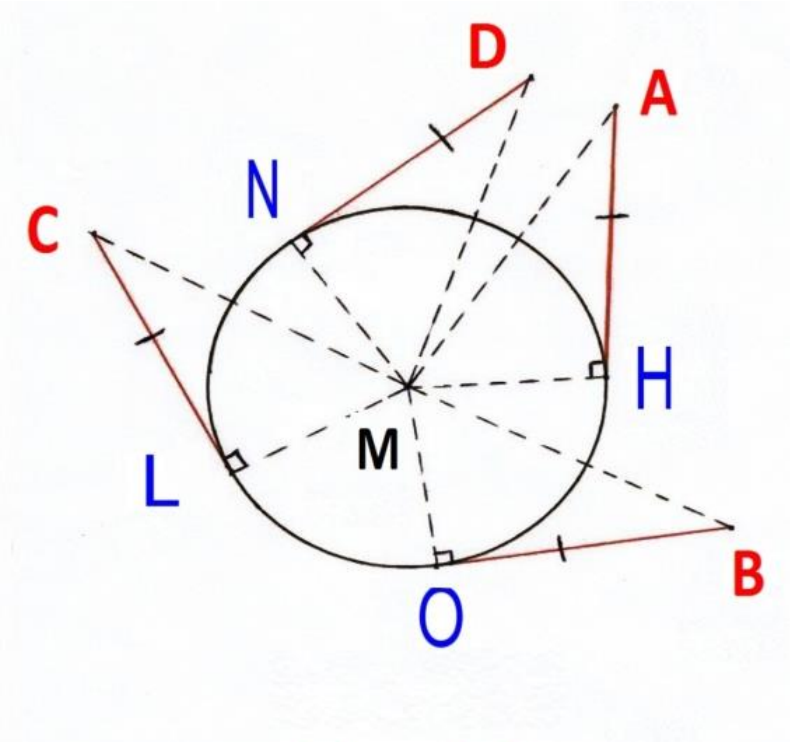


Fig (B)

* المعطيات :

بالنظر في **Fig (B)** نجد أن :

M دائرة ، **AH , BO , CL , DN** مماسات للدائرة **M** في **L , O , H , N** علي الترتيب وجميعها متساوية .

* المطلوب :

إثبات أن أطراف المماسات وهي **A , B , C , D** تقع جميعها علي محيط دائرة واحدة ويكون مركزها هو نفس مركز الدائرة **M** .

* العمل :

نصل النقطة **M** بالنقاط **A , B , C , D , H , O , L , N**

* البرهان :

في المثلثات **Δ DNM** و **Δ CLM** و **Δ BOM** و **Δ AHM** فيهم

(معطي) **AH = BO = CL = DN**

MH = MO = ML = MN (أنصاف أقطاع الدائرة **M**) ,

$\angle AHM = \angle BOM = \angle CLM = \angle DNM = 90^{o}$,

∴ ينطبق المثلثات الأربعة وينتج أن

AM = BM = CM = DM

وبما أنهم مشتركين في نقطة واحدة هي **M**

إذن: كل من **AM , BM , CM , DM** هم أنصاف أقطار لدائرة واحدة مركزها **M**

إذن: كل من النقاط **D , C , B , A** تقع جميعاً علي محيط دائرة واحدة مركزها **M** .

وهو المطلوب إثباته

نظرية دوائر الزاوية المركزية

تمهيد :

الدائرة المركزية الداخلية : هي الدائرة التي تمس ضلعي الزاوية المركزية لدائرة وتمس محيط الدائرة من الداخل .

الدائرة المركزية الخارجية : هي الدائرة التي تمس ضلعي الزاوية المركزية لدائرة وتمس محيط الدائرة من الخارج .

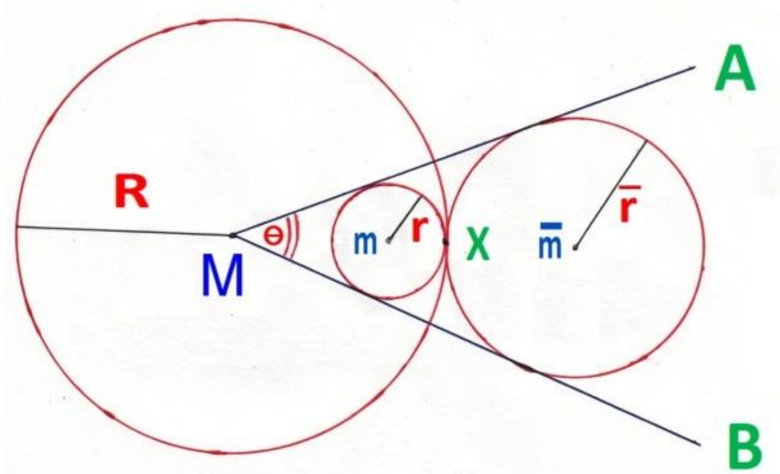


Fig (A)

- **R** : هو نصف قطر الدائرة ذات الزاوية المركزية .
- **θ** : هي الزاوية المركزية للدائرة ذات الزاوية المركزية .
- **r** : هو نصف قطر الدائرة المركزية الداخلية .

- $\bar{r}$: هو نصف قطر الدائرة المركزية الخارجية .

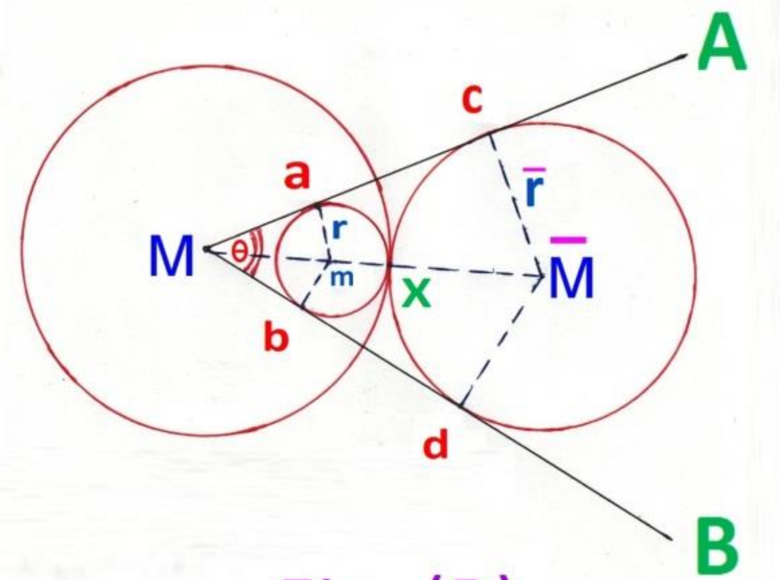


Fig (B)

* النظرية :

نصف قطر الدائرة المركزية الداخلية لأي زاوية مركزية في أي دائرة نصف قطرها R هو r حيث :

$$r = \frac{R}{cosec\ \frac{\theta}{2} + 1}$$

ونصف قطر الدائرة المركزية الخارجية لأي زاوية مركزية في أي دائرة هو $\bar{r}$ حيث :

$$\bar{r} = \frac{R}{cosic\ \frac{\theta}{2}\ - 1}$$

حيث θ هي الزاوية المركزية

* المعطيات :

بالنظر في Fig (B) :

M هي دائرة نصف قطرها R بها زاوية مركزية هي θ ، m هي دائرة مركزية داخلية للزاوية θ وتمس ضلعي الزاوية θ في النقط a , b ونصف قطرها هو r ، $\overline{m}$ هي دائرة مركزية خارجية للزاوية المركزية θ وتمس ضلعي الزاوية θ في c , d ونصف قطرها هو $\overline{r}$. جميع الدوائر متماسة في النقطة x .

* المطلوب :

إثبات أن

$$r = \frac{R}{cosec\,\frac{\theta}{2} + 1} \quad , \quad \overline{r} = \frac{R}{cosic\,\frac{\theta}{2} - 1}$$

* العمل :

نصل كل من $d\overline{m}$, $c\overline{m}$, bm , am ثم نصل $M\overline{m}$.

* البرهان :

بالنظر في Fig (B) نجد أن :

∵ كل من الدائرة $\overline{m}$, m , m متماسة في نقطة واحدة هي x .

∴ مراكز الدوائر الثلاثة ونقطة التماس يقعوا جميعاً علي استقامة واحدة .

∴ كل من النقاط $\overline{m}$, x , m , M علي استقامة واحدة .

* في المثلثان $\triangle M\overline{m}c$ ، $\triangle M\overline{m}d$ فيهما :

(مماسان لدائرة من نقطة خارجها) M c = M d

(مشترك) , $M\overline{m}$

(أنصاف أقطار دائرة) $\quad , \ \bar{m}c = \bar{m}d$

$\therefore$ ينطبق المثلثان وينتج أن :

$$\angle\, cM\bar{m} = \angle\, dM\bar{m}$$

أي أن $M\bar{m}$ ينصف الزاوية θ المركزية .

* في المثلث $\Delta\, a\, m\, M$ يكون :

$$Mm = r \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

But $\qquad R = Mm + r$

$$\therefore\ R = r \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} + r$$

$$\therefore\ R = r \left(\operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} + 1 \right)$$

$$\therefore r = \frac{R}{\operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} + 1}$$

وهو المطلوب أولاً .

* في المثلث $\Delta\, c\, M\bar{m}$ يكون :

$$\bar{r} = M\bar{m} \ \sin \frac{\theta}{2} = (R + \bar{r}) \ \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \bar{r} = R \sin \frac{\theta}{2} + \bar{r} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \bar{r} - \bar{r} \sin \frac{\theta}{2} = R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \bar{r} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) = R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ \bar{r} = \frac{R\ \sin\frac{\theta}{2}}{1 - \sin\frac{\theta}{2}}$$

بقسمة البسط والمقام علي $\sin\frac{\theta}{2}$

$$\therefore\ \bar{r} = \frac{R}{\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} - 1}$$

$$\therefore\ \bar{r} = \frac{R}{\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2} - 1}$$

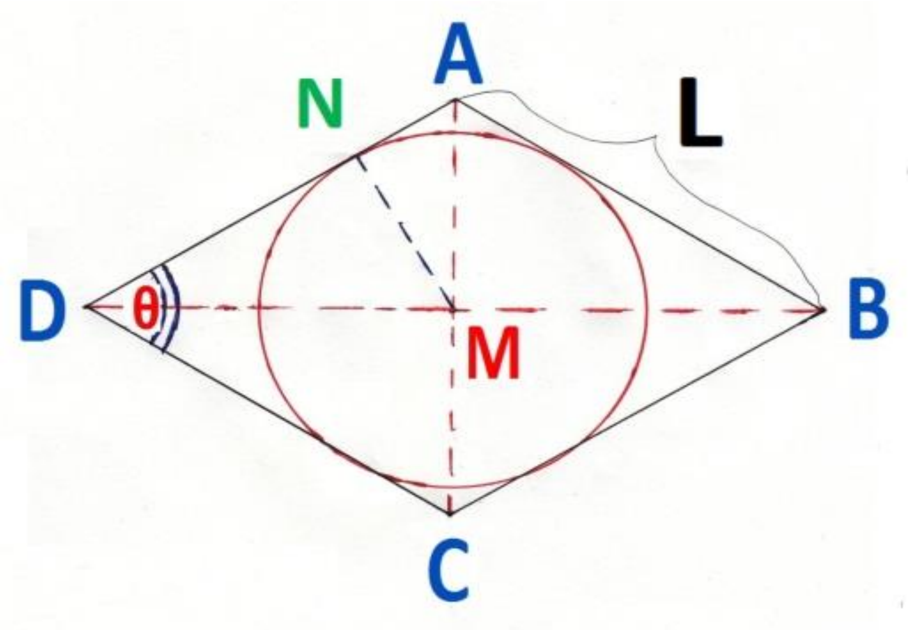
وهو المطلوب ثانياً .

نظرية دائرة المعين

(في أي معين طول ضلعه L وزاويته الصغرى θ يكون نصف قطر دائرة المعين R)

حيث :

$$R = L \ \sin \frac{\theta}{2} \ \cosin \frac{\theta}{2}$$



* المعطيات :

A B C D معين طول ضلعه L ، زاويته الصغرى $\theta = \angle ADC$ ،

M هي دائرة المعين نصف قطرها R .

* المطلوب : إثبات أن

$$R = L \ \sin \frac{\theta}{2} \ \cosin \frac{\theta}{2}$$

* العمل :

نصل كل من AC , BD فيتقاطعا في M التي هي مركز كل من المعين والدائرة ، ثم نصل MN حيث N هي نقطة نماس محيط الدائرة مع الضلع AD .

* البرهان :

بما أن القطران في المعين ينصف كل منهما الآخر.

$\therefore$ كل من المثلثات

$\Delta\, MAB \quad , \quad \Delta\, MBC \quad , \quad \Delta\, MCD \quad , \quad \Delta\, MDA$

تكون متطابقة لتساوى أضلاعهم المتناظرة .

$\therefore$ مساحات كل من المثلثات الأربعة تكون متساوية .

$\therefore$ جميع الأعمدة الساقطة من مركز المعين علي الأضلاع AB , BC , CD , DA تكون متساوية .

$\therefore$ الدائرة M تمس أضلاع المعين الأربعة (دائرة المعين)

$\therefore$ $AD \perp MN$

$\therefore$ المثلث $\Delta\, MND$ قائم الزاوية في N ولكن في المعين يكون القطران متعامدان .

$\therefore$ المثلث $\Delta\, AMD$ قائم الزاوية في M .

بما أن القطر في المعين ينصف زاوية الرأس

$$\therefore\ \angle\, ADM = \frac{\theta}{2} \qquad \dots\dots\dots\dots\ (1)$$

في المثلث $\Delta\, MND$ يكون :

$$MD = AD \ \cos\text{in} \ \frac{\theta}{2} = L \ \cos\text{in} \ \frac{\theta}{2}$$

بالتعويض في (1) يكون :

$$\therefore \quad MN = L \ \cos\text{in} \ \frac{\theta}{2} \ \ \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad R = L \ \sin \ \frac{\theta}{2} \ \ \cos\text{in} \ \frac{\theta}{2}$$

وهو المطلوب إثباته .

نظرية الدوائر المتماسة الخارجية

إذا مست دائرة نصف قطرها R من الخارج عدد n من الدوائر المتطابقة والمتماسة مثنى مثنى بحيث لا يوجد فواصل بين أي دائرة وأخرى وأن نصف قطر أي منهم يساوى r فإن :

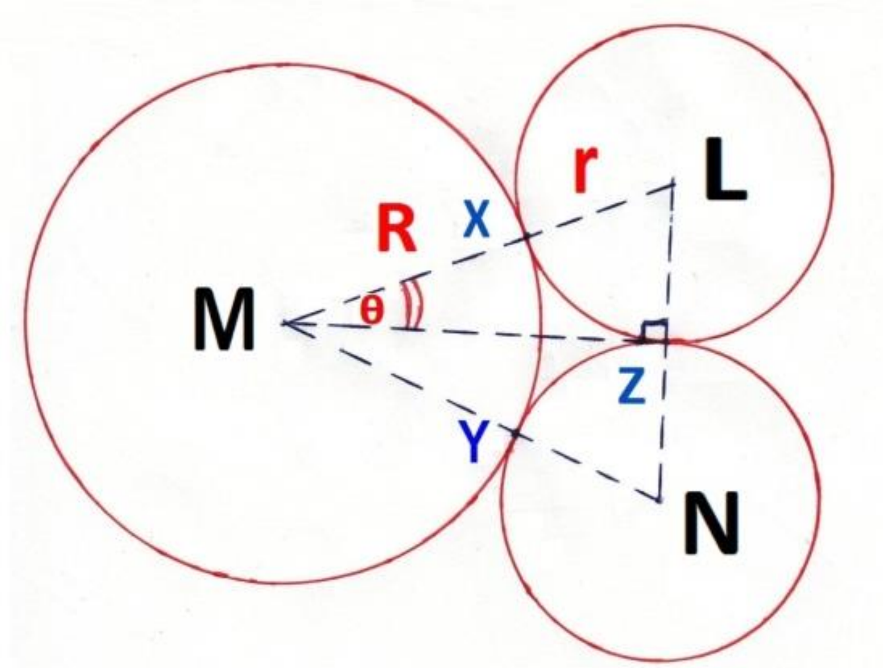
$$r = \frac{R}{cosec \frac{180}{n} - 1}$$

* تمهيد :

نفرض لدينا عدد n من الدوائر المتماسة مثنى مثنى بحيث لا يوجد فواصل بين كل دائرة وأخرى و أن نصف قطر كل منهم هو r وجميعهم يمسوا من الخارج دائرة M نصف قطرها R فإن العلاقة بين R , r

تربطها العلاقة الخاصة بالنظرية . أي أنه إذا كان لدينا دائرة M ذات نصف قطر R والمراد إيجاد نصف قطر r لأي دائرة من عدد n من الدوائر المتطابقة والمتماسة مثنى مثنى والماسة من الخارج جميعهم للدائرة M بحيث لا توجد أي فواصل بين أي دائرة وأخرى فإنه يمكن إيجاد نصف قطر أي منهم r من العلاقة .

$$r = \frac{R}{cosec \frac{180}{n} - 1}$$



*** المعطيات :**

M دائرة نصف قطرها R يمسها من الخارج عدد n من دوائر متطابقة ومتماسين مثنى مثنى ونصف قطر كل منهم r .

*** المطلوب :**

إثبات أن نصف قطر أي دائرة r من مجموعة الدوائر المتطابقة والمتماسة مثنى مثنى من الخارج وجميعهم يمسوا الدائرة M من الخارج بحيث لا يوجد فراغ بين أي دائرة وأخرى يأتى من العلاقة ألآتية :

$$r = \frac{R}{cosec\,\frac{180}{n} - 1}$$

* العمل :

كما بالشكل :

- نرسم الدائرتان L و N المتطابقتان والمتماستان من الخارج في Z ويمسوا الدائرة M من الخارج في Y و X .

- ثم نصل كل من LN و MN و ML

* البرهان :

كما بالشكل المثلثان $\Delta\, MLZ$ و $\Delta\, MNZ$ فيهما :

$ML = MN$,

$LZ = NZ$,

MZ مشترك

$\therefore$ ينطبق المثلثان وينتج أن :

$$\angle MZL = \angle MZN = 90^{o}$$

$\therefore$ MZ مماساً لكل من الدائرتان N و L

وأيضاً $\angle NMZ = \angle LMZ$

ولكن

$$\angle LMN = \frac{360}{n}$$

$$\therefore \quad \angle LMZ = \frac{180}{n} = \theta$$

* في المثلث $\Delta\, LMZ$ يكون :

$$r = (LM) \times \frac{LZ}{LM} = (R + r)\ \sin \frac{180}{n}$$

$$\therefore\ r = r\sin\frac{180}{n} + R\sin\frac{180}{n}$$

$$\therefore\ r - r\sin\frac{180}{n} = R\sin\frac{180}{n}$$

$$\therefore\ r\left(1 - \sin\frac{180}{n}\right) = R\sin\frac{180}{n}$$

$$\therefore\ r = \frac{R\sin\frac{180}{n}}{1 - \sin\frac{180}{n}}$$

بقسمة البسط والمقام علي $\sin\frac{180}{n}$

$$\therefore\ r = \frac{R}{\frac{1}{\sin\frac{180}{n}} - 1}$$

$$\therefore\ r = \frac{R}{\mathrm{cosic}\ \frac{180}{n} - 1}$$

وهو المطلوب إثباته .

طريقة شكشك لحساب النسبة التقريبية π

* تمهيد :

إذا فرضنا أن المضلع A B C D E F سداسي منتظم طول ضلعه L وعدد أضلاعه ($n = 6$) ونصف قطر دائرته الخارجية هو R ، وقد وصلنا مركز المضلع M برؤوس المضلع فسينتج من ذلك n من المثلثات المتطابقة كما في Fig (A) ويكون :

- قاعدة كل مثلث هي L .

- زاوية رأس أي مثلث $= \dfrac{360}{n}$ درجة

- مساحة المثلث $= \dfrac{1}{2} L \times \dfrac{1}{2} L \ \cot \dfrac{180}{n}$

∴ مساحة المضلع $= \dfrac{1}{4} L^2 n \ \cot \dfrac{180}{n}$

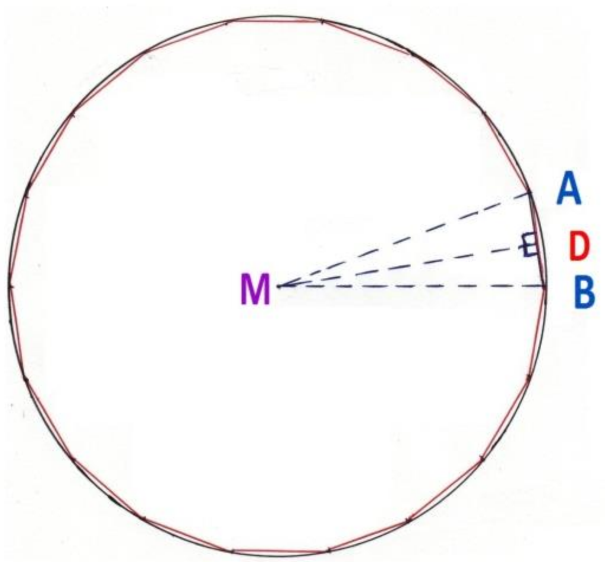


Fig (B)

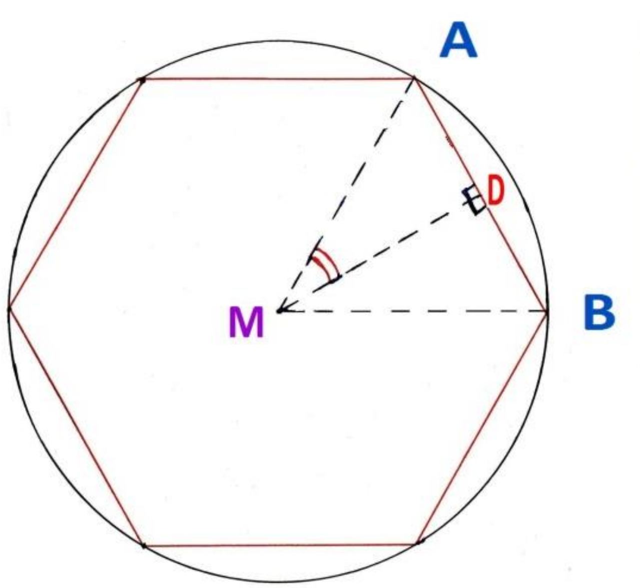


Fig (A)

حساب النسبة π :

في **Fig (B)** نفرض أن عدد أضلاع المضلع كبير جداً وليكون مليون مليار ضلع ، هنا يكاد ينطبق محيط المضلع علي محيط دائرته الخارجية وعندئذ يكون :

مساحة المضلع = مساحة الدائرة

$$\therefore \frac{1}{4} L^2 n \cot an \frac{180}{n} = \pi R^2$$

حيث **R** هي نصف قطر الدائرة الخارجية للمضلع ولكن عند انطباق المضلع علي الدائرة الخارجية له يكون :

$$R = MA = MD = \frac{1}{2} L \cot an \frac{180}{n}$$

$$\therefore \frac{1}{4} L^2 n \cot an \frac{180}{n} = \pi \left[\frac{1}{2} L \cot an \frac{180}{n}\right]^2$$

$$\therefore \frac{1}{4} L^2 n \cot an \frac{180}{n} = \frac{1}{4} \pi L^2 \cot an^2 \frac{180}{n}$$

$$\therefore n = \pi \cot an \left(\frac{180}{n}\right)$$

$$\therefore \pi = \frac{n}{\cot an \left(\frac{180}{n}\right)}$$

واضح من المعادلة السابقة أن النسبة π تعتمد أساساً على عدد الأضلاع **n** ، فكل ما ذادت قيمة **n** كل ما اقتربت قيمة π من الدقة .

وبأخذ $n = 10^{30}$ نجد أن :

$$\pi = 10^{30} \tan\left(\frac{180}{10^{30}}\right) =$$

$$= 10^{30} \times 10^{-30} \times 3.141592654 = 3.141592654$$

ملحوظة : باقي الكسر يعتمد علي دقة الآلة الحاسبة أو الكمبيوتر الذي تجرى عليه عملية الحساب .

كليـــة العـلوم

مكتب العميد

٢٠١٧/١/١٦

إلى من يهمه الأمر

بناءً علي خطاب السيد أ.د. محمود محمد صقر – رئيس أكاديمية البحث العلمي والتكنولوجيا بتاريخ ٢٠١٦/٤/١٨ وبناءً علي التقرير الخاص عن فحص المادة العلمية من السيد د. سيد حسن عابد الأستاذ بقسم الرياضيات تشهد كلية العلوم جامعة القاهرة بأن **الباحث/ أحمد عاطف شكشك عبد المجيد** قد قام بصياغة وإثبات عدة نظريات في مجال الأشكال الهندسية.

- نظرية نقاط المضلع.
- نظرية نقاط الهرم.
- نظرية دوائر المستقيمات المتقاطعة.
- نظرية المضلعات المتناصفة.
- نظرية مضلعات الدوائر.
- نظرية ممسات الدوائر وعكسها.
- نظرية نقاط دائرة المضلع الزوجي.
- وإختتم الطالب بطريقة نظرية لحساب النسبة التقريبية للعدد ط.

وهذا شهادة منا بذلك،،،

عميد الكلية

١٧/١/١٦

أ.د. السيد فهيم السيد طه

جامعة القاهرة – جيزة الأورمان – الرمز البريدى ١٢٦١٣

AS000F130101 Manar

السيد الأستاذ الدكتور/ رئيس مجلس قسم الرياضيات

تحية طيبة وبعد

تجدون فيما يلى التقرير الخاص عن فحص المادة العلمية المقدمة من الطالب / أحمد عاطف شكشك.

قام الطالب بصياغة واثبات عدة تمهيديات فى مجال نظريات الأشكال الهندسية:

- تمهيدية خاصة بنقاط المضلع " مجموع أبعاد أى نقطة تنتمى للمضلع عن أضلاعة مقدار ثابت" يساوى 1/2 ل ن ظتا (180/ ن) ، حيث ل طول ضلعة ، ن عدد اضلاعة

- تمهيدية خاصة بنقاط الهرم لمضلع " مجموع أبعاد أى نقطة تنتمى الى هرم ثلاثى منتظم عن أوجهه مقدار ثابت" يساوى ارتفاع الهرم = $\sqrt{2/3}$ل، حيث ل طول حرف الهرم

- تمهيدية خاصة بدوائر المستقيمات المتقاطعه " المسافة بين مركزى دائرتين مماستين لمستقيمين متقاطعين وفى جهتين متقابلتين من التقاطع يساوى

(نق$_1$ + نق$_2$) قتا ($\frac{\theta}{2}$) ، حيث نق$_1$ ، نق$_2$ هما انصاف اقطار الدوائر و θ زاوية التقاطع

- تمهيدية خاصة بالمضلعات المتناصفة وتمهيدية اخرى خاصة بمضلعات ومماسات الدوائر وعكسها

- واختتم الطالب البحث بايجاد طريقة مبسطة لحساب النسبة التقريبية للعدد ط

بناءأ عليه فان ما قام به الطالب من طرح واثبات هذة التمهديات، والتى يعلو مستواها على مستوى طالب فى المرحلة قبل الجامعية، لمجهود ينم على ان الطالب يتنبأ له بمستوى علمى متميز فى مجال الرياضيات يستحق الاشادة به ودعمه .

د/ سيد حسن عابد

١٢/ ٧/ ٢٠١٦

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة القاهرة

يعتمد

١٢/ ١٧/ ٢٠١٦

جمهورية مصر العربية

المجلس الاعلي للثقافة

الامانة العامة

الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات

ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: ٣٨٦ عدد المرفقات ٣٧م تاريخ الأيداع ٢٢ / ١٠ / ٢٠١٤ الساعة ص ١٠:٥٦:٤٠

اسم طالب الإيداع: احمد عاطف شكشك عبدالمجيد /تحت ولاية والده/عاطف شكشك

اسم الشهرة: —

رقم الأيداع: ٢٠١٤٠٠٣٨٦ الجنسية: مصرى التليفون: ٤٤٦٣٠٧٤٥-

محل الأقامة: ٧ش صدقى عمارة -القلج البلد -مركز الخانكة -القليوبية

الحى : مركز الخانكة المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة:

اسم الوكيل: التليفون: —

محل الأقامة: —

عنوان المصنف: بحث فى الهندسة المستوية

نوع المصنف: مصنف مكتوب -رياضيات -هندسة مستوية

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

عدد" ٤ " نظريات هندسية وعكس نظرية وهم كالآتى

أ-نظرية شكشك للمضلعات المتناصفة ،

ب-نظرية شكشك لمضلعات الدوائر ،

ج-نظرية شكشك لمماسات الدائرتين ،

د-عكس نظرية شكشك لمماسات الدائرتين ،

هـ-نظرية شكشك لنقاط دائرة المضلع ، ** تم

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف *- صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح) رقم ٠٢٤٨٥٧٥

*- صورة رقم قومى ٢٦٢١٠٠٧١٤٠١٤٢٦

الموظف المختص بالايداع

المراجعة

فوزية عبد الباسط

مدير إدارة

(حقوق المؤلف)

٢٠١٤/١٠/٢٢

أستخرجت هذه الشهادة بناء على طلب طالب الايداع ودون أدنى مسئولية على ادارة حقوق المؤلف بالادارة المركزية للشئون الادبية والمسابقات بوزارة الثقافة - تنفيذ المادة (١٤) و المادة (١٦) من اللائحة التنفيذية للكتاب الثالث من قانون حماية الملكية الفكرية رقم (٨٢) لسنة ٢٠٠٢ الصادر بقرار رئيس مجلس الوزراء رقم (٤٩٧) لسنة ٢٠٠٥م والقرار الوزارى رقم (٣٣٤) لسنة ٢٠٠٥م

جمهورية مصر العربية
المجلس الاعلي للثقافة
الامانة العامة
الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات
ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: ٢٨٥ عدد المرفقات ٣٩م تاريخ الأيداع ٣٠ / ٩ / ٢٠١٣ الساعة ١٣:٠٠:٤١

اسم طالب الإيداع: احمد عاطف شكشك عبد المجيد تحت ولاية الاب عاطف شكشك عبد المجيد

رقم الأيداع: ٢٠١٣٠٠٢٨٥ الجنسية: مصرى التليفون: ٤٤٦٣٠٧٤٥-

محل الأقامة: ٧ش صدقى عمارة القلج البلد

الحى : مركز الخانكة المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة:

اسم الوكيل: ——— التليفون: ———

محل الأقامة: ———

عنوان المصنف: بحث فى الهندسة الفراغية والمستوية

نوع المصنف: مصنف مكتوب - رياضيات

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

وتشمل نظريات شكشك فى :-نقاط المضلع -كور المستويات المتقاطعة -دائرة المثلث -دوائر المستقيمات المتقاطعة - القطعة الدائرية -القبة الكروية ،
٦نظريات + ١١نتيجة + ٢حقيقة هندسية+طريقة حساب النسبة التقريبية ط+قانون مساحة المضلع" المنتظم" ، ** تم

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف *- صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح) رقم ٠٢٤٢٢٨٨

*- صورة رقم قومى ٢٦٢١٠٠٧١٤٠١٤١٦

الموظف المختص بالإيداع
محمود عبد اللطيف

مدير إدارة
(حقوق المؤلف)
٢٠١٣/٩/٣٠

المراجعة

أستخرجت هذه الشهادة بناء على طلب طالب الايداع ودون أدنى مسئولية على ادارة حقوق المؤلف بالادارة المركزية للشئون الادبية والمسابقات بوزارة الثقافة - تنفيذ المادة (١٤) و المادة (١٦) من اللائحة التنفيذية للكتاب الثالث من قانون حماية الملكية الفكرية رقم (٨٢) لسنة ٢٠٠٢ الصادر بقرار رئيس مجلس الوزراء رقم (٤٩٧) لسنة ٢٠٠٥م والقرار الوزارى رقم (٣٣٤) لسنة ٢٠٠٥م

جمهورية مصر العربية
المجلس الاعلي للثقافة
الامانة العامة
الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات
ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: ٤١٨ عدد المرفقات ٦م تاريخ الأيداع ١٢ / ١٠ / ٢٠١٦ الساعة ص ١١:٥٦:٤٨

اسم طالب الإيداع: أحمد عاطف شكشك عبد المجيد

اسم الشهرة:

رقم الأيداع: ١٧٠١٦٠٠٤١٨ الجنسية: مصرى التليفون: ٠١٢٢٩٩٣٠٧٩٥-٠٤٤٦٣٠٧٤٥

محل الأقامة: ٧ش صدقي عمارة -القلج البلد-مركز الخانكة-القليوبية

الحى : مركز الخانكة المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة:

اسم الوكيل: التليفون:

محل الأقامة:

عنوان المصنف: نظريات في الهندسة المستوية

نوع المصنف: مصنف مكتوب - رياضيات

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

أولا :- نظرية شكشك لدوائر الزاوية المركزية ،
ثانيا :- نظرية شكشك لدائرة المعين ،
ثالثا :- نظرية شكشك للدوائر المتماسة ، ** تم

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف *- صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح) رقم ٠٧٨٠٢١٨

*- صورة رقم قومي ٢٩٨١٠١٩١٤٠٠١٣٦

الموظف المختص بالايداع مدير إدارة

هالة ...

فوزية عبد الباسط

المراجعة (حقوق المؤلف)

٤٧٢٥٥

أستخرجت هذه الشهادة بناء على طلب طالب الايداع ودون أدنى مسئولية على ادارة حقوق المؤلف بالادارة المركزية للشئون الادبية والمسابقات بوزارة الثقافة - تنفيذ المادة (١٤) و المادة (١٦) من اللائحة التنفيذية للكتاب الثالث من قانون حماية الملكية الفكرية رقم (٨٢) لسنة ٢٠٠٢ الصادر بقرار رئيس مجلس الوزراء رقم (٤٩٧) لسنة ٢٠٠٥م والقرار الوزارى رقم (٣٣٤) لسنة ٢٠٠٥م

Ministry of Scientific Research
Academy of scientific Research & Technology
PATENT OFFICE

EGYPTIAN PATENT OFFICE
EGPO
مكتب براءات الاختراع المصرى

وزارة الدولة للبحث العلمى
أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا
مكتب براءات الاختراع

جمهورية مصر العربية
وزارة الدولة لشئون البحث العلمى
أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا
مكتب براءات الاختراع

٢٠١٢٠٧٠٥٩٠

محضر إيداع المستندات الخاصة بطلب براءة الاختراع*

إيصال استلام
رقم

(٢١) طلب براءة اختراع رقم :.....٢٠١٢/٠٥٩٠.....................................

(٢٢) تاريـخ تقديـم الطلـب :. ٢٠١٢/٣/٢٩

(٧١) اسـم طالـب البـراءة : **أحمد عاطف شكشك عبد المجيد شكشك**

محل الإقامة / المركز العـام : **١٠ شارع صدقى عماره – القلج البلد – مركز الخانكه – القليوبيه**

(٥٤) التسمية التى تدل على موضوع الاختراع: **جهاز لقياس زاوية سقوط الشمس على الارض**

رقم المستند	نوع المستند	عدد الصفحات
١	استمارة طلب براءة اختراع	٨
٢	الوصف المختصر باللغة العربية (من ثلاث نسخ)	١
٣	الوصف المختصر باللغة الإنجليزية (من ثلاث نسخ)	١
٤	الوصف الكامل للاختراع باللغة العربية ٤–١ الفن السابق ٤–٢ المشكلة أو القصور فى الفن السابق ٤–٣ الجديد فى موضوع الاختراع ٤–٤ الوصف التفصيلى ٤–٥ طريقة الاستغلال ٤–٦ العناصر الجديدة المطلوب حمايتها ٤–٧ لوحات الرسم و شرحها ٤–٨ بيان بالطلبات التى قدمت بالخارج عن ذات الاختراع / نموذج المنفعة **(أو تعهد بتقديم الوصف الكامل خلال مهلة ٦أشهر)**	١٢
٥	استمارة استيفاء بيانات من جهة العمل (المصريين فقط) (أو تعهد بتقديمها خلال أربعة أشهر)	
٦	نموذج التعليمات و إقرار باستلامه	٢
٧	مستند الأسبقية (أو طلب الحصول على مهلة ثلاثة أشهر)	
٨	مستند التوكيل (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
٩	مستند التنازل (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
١٠	مستند يدل على التواجد القانوني للشخص المعنوي (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
١١	الوصف الكامل باللغة الإنجليزية(بالنسبة للطلبات المقدمة من أجانب)	
١٢	~~إقرار النشر~~ صورة بطاقة ولا الامر	٢
١٣	تقديم شهادة تثبت ايداع مزرعة حية من موضوع الطلب بأحد المعامل المعتمـدة مـن الـوزير المختص بشئون البحث العلمى (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
١٤	تقديم المستندات الدالة على حصول المخترع على مصدر المواد البيولوجية النباتية أو الحيوانية أو المعارف التقليدية الطبية أو الصناعية أو الحرفية ، أو تراثًا حضاريًا أو بيئيًا بطريق مـشروعة وفقًا للتشريعات النافذة فى جمهورية مصر العربية (أو تعهد بتقديم المستندات خلال أربعة أشهر)	
١٥	أخرى أصل شهادة ميلاد	١

عدد
٧

مقدم الطلب مفوض سداد ... حيث ان الطالب ... الوزاري رقم ٢٢ لسنة ...

٢٠١٢/٣/٢٩

عنوان المراسلة : **مساكن الورديان القديمة بلوك ٥ شقة ١٠١**

اسم الوكـــيل :.

المحل المختار :.

* (يتم استيفاء هذا المستند من قبل الموظف المسئول بمكتب براءات الاختراع)

(عن رئيس مكتب براءات الاختراع) سوزان محمد ...

١٠١ ش القصر العينى – القاهرة – جمهورية مصر العربية
تليفون :٢٧٩٢١٢٧٢ – ٢٧٩٢١٢٧٤ - ٢٧٩٢١٢٩١-٢٠٢+
فاكس : ٢٧٩٢١٢٧٣ – ٢٠٢+
بريد إلكترونى: patinfo@egypo.gov.eg

101 Kasr Al-Aini St., Cairo, Egypt
Tel.: +202–27921272–27921274- 27921291
Fax: +202- 27921273
E-mail: patinfo@egypo.gov.eg

Arab Republic of Egypt Ministry of Scientific Research Academy of scientific Research & Technology PATENT OFFICE	EGYPTIAN PATENT OFFICE EGPO مكتب براءات الاختراع المصرى	جمهورية مصر العربية وزارة الدولة لشئون البحث العلمى أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا مكتب براءات الإختراع

محضر ايداع مستندات طلب براءة اختراع

التاريخ : ٢٧/٥/٢٠١٢ الوقت : ١٢,٥٠	رقم الإيصال :	رقم الطلب : ٢٠١٢/٩٠٨
الجنسية : مصرى		إسم الطالب : احمد عاطف شكشك عبد المجيد شكشك

مسمى الاختراع : جهاز لانتاج غاز ثانى اكسيد الكربون

أسم الوكيل (إن وجد):	بيان المستندات المستلمة مع الطلب

☒	1 - نموذج طلب براءة اختراع أو شهادة منفعة
☒	2 - وصف تفصيلي للاختراع عربى
☒	3 - الرسم الخاص بالاختراع إذا كان ضروريا إدراك الاختراع أو كان طابع الاختراع يسمح بذلك عربى
☒	4 - ملخص الاختراع باللغة العربية والانجليزية مصحوبا بأفضل رسم توضيحي إن وجد
☐	5- مستخرج من السجل التجاري أو مستخرج رسمي من عقد التأسيس إذا كان الطالب شركة أو هيئة
☐	6 - سند الوكالة إذ أودع الطلب بواسطة وكيل
☐	7 - المستند الدال على أحقية الطالب في الاختراع إذا كان الطالب غير المخترع (التنازل)
☐	8 - موافقة صاحب الشأن إذ كانت العناصر الجوهرية للاختراع قد تم الحصول عليها من اختراع شخص آخر
☐	9 - إذا كان الطلب يتضمن الرغبة في اعتبار الأولوية في التسجيل لطلب سبق تقديمه في دولة تكون طرفا في اتفاقية أو معاهدة دولية مع دولة جمهورية مصر العربية وفقا للمادة (11) من القانون فانه يجب تقديم صورة من الطلب السابق و المستندات المرفقة به مصحوبة بشهادة تبين تاريخ و رقم إيداعه و الدولة التي أودع فيها.
☐	10 - مستندات طلب (PCT) المنشور و تقرير البحث و الفحص الفني
☐	11 - الشهـــادة الصادرة بالحمـايــــة المـؤقـــتة إن وجدت
☐	12- تعهد كتابي بتقديم اللازم من المستندات عدا المرفق بالطلب منها (من 4 - 11)
☒	13 - اخرى اصل اثبات قيد + صورة بطاقة رقم قومى + امر دفع + ايصالات

مجموع المستندات المستلمة:	اسم المستلم : دعاء علوى
الختم :	التوقيع : ٢٠١٢/٥/٢٧

يؤشر بعلامة ☒ أمام المستندات المستلمة .
مدة براءة الاختراع (عشرون سنة) . و مدة شهادة المنفعة (سبع سنوات) . ويجب سداد الرسم السنوي ... أول سنة اعتبارا من السنة التالية لتاريخ تقديم الطلب و بانتظام .

1

٢

جمهورية مصر العربية
وزارة الدولة لشئون البحث العلمى
أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا
مكتب براءات الاختراع

١٠/٢ ١ ٩٥

٢٠١٢، ٤، ٦ ، ٢

محضر إيداع المستندات الخاصة بطلب براءة الاختراع*

إيصال استلام
رقم

(٢١) طلب براءة اختراع رقم :.....٢٠١٢/٠٦٠٢.....

(٢٢) تاريخ تقديم الطلب :. ٢٠١٢/٤/٢

(٧١) اسم طالب البراءة :. **أحمد عاطف شكشك عبد المجيد شكشك**

محل الإقامة / المركز العام : **١٠ شارع صدقى عماره – القلج البلد – مركز الخانكه – القليوبيه**

مقدم الطلب معفى من سداد الرسوم طبقا للبند الخاص بالقرار الوزارى رقم ٢٢ لسنة ٢٠١٢ للعراق

(٥٤) التسمية التى تدل على موضوع الاختراع: **جهاز لقياس زاوية ميل الاسطح المستويه المائله**

رقم المستند	نوع المستند	عدد الصفحات
١	استمارة طلب براءة اختراع	٨
٢	الوصف المختصر باللغة العربية (من ثلاث نسخ)	١
٣	الوصف المختصر باللغة الإنجليزية (من ثلاث نسخ)	١
٤	الوصف الكامل للاختراع باللغة العربية ٤–١ الفن السابق ٤–٢ المشكلة أو القصور فى الفن السابق ٤–٣ الجديد فى موضوع الاختراع ٤–٤ الوصف التفصيلى ٤–٥ طريقة الاستغلال ٤–٦ العناصر الجديدة المطلوب حمايتها ٤–٧ لوحات الرسم و شرحها ٤–٨ بيان بالطلبات التى قدمت بالخارج عن ذات الاختراع / نموذج المنفعة **(أو تعهد بتقديم الوصف الكامل خلال مهلة ٦ أشهر)**	٧ + لوحة
٥	استمارة استيفاء بيانات من جهة العمل (المصريين فقط) (أو تعهد بتقديمها خلال أربعة أشهر)	
٦	نموذج التعليمات و إقرار باستلامه	٢
٧	مستند الأسبقية (أو طلب الحصول على مهلة ثلاثة أشهر)	
٨	مستند التوكيل (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
٩	مستند التنازل (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
١٠	مستند يدل على التواجد القانوني للشخص المعنوي (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
١١	الوصف الكامل باللغة الإنجليزية(بالنسبة للطلبات المقدمة من أجانب)	
١٢	اقرار النشر	
١٣	تقديم شهادة تثبت ايداع مزرعة حية من موضوع الطلب بأحد المعامل المعتمدة من الوزير المختص بشئون البحث العلمى (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
١٤	تقديم المستندات الدالة على حصول المخترع على مصدر المواد البيولوجية النباتية أو الحيوانية أو المعارف التقليدية الطبية أو الصناعية أو الحرفية ، أو تراثًا حضاريًا أو بيئيًا بطريق مشروعة وفقًا للتشريعات النافذة فى جمهورية مصر العربية (أو تعهد بتقديم المستندات خلال أربعة أشهر)	
١٥	أخرى صورة بطاقة ولى الامر + صورة الشهادة الدراسية	٢+١

عدد

مجموع المستندات
٧

من الاصل
٢٠١٢/٤/٢

عنوان المراسلة : **١٠ شارع صدقى عماره – القلج البلد – مركز الخانكه – القليوبيه**

اسم الوكيل :.

المحل المختار :.

* (يتم استيفاء هذا المستند من قبل الموظف المسئول بمكتب براءات الاختراع)

٢٠١٢

(عن رئيس مكتب براءات الاختراع)

٢٣٢٧٢

٢٠١٢/٤/٢


جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم

شهادة تقدير

يسر وزارة التربية و التعليم

منح السيد / الطالب / أحمد عاطف شكشك

هذه الشهادة تقديراً لإبداعاته العلمية

عن عام ٢٠١٣/ ٢٠١٤م

وزير التربية و التعليم

أ.د محمود ابو النصر

الباب الثانى
نظريات الباحثة هدى شكشك

نبذة عن الباحثة

ولدت هدى شكشك بمحافظة القليوبية بجمهورية مصر العربية ودرست بالمراحل الابتدائية والاعدادية والثانوية بالمدارس الحكومية المصرية وقد ابتكرت أول نظرية لها فى يناير عام ٢٠١٢ وكانت حينئذ فى الصف الثانى الثانوى وقبل اتمام المرحلة الثانوية وصل عدد نظرياتها إلى ٥ نظريات ثم التحقت بكلية العلوم وتتالت النظريات إلى أن وصل عدد النظريات إلى ١٧نظرية كما قامت باختراع عدد من الاجهزة منها جهاز يحول غاز ثانى أكسيد الكربون فى الجو إلى أكسجين ويعقم الهواء من الميكروبات والفيروسات كما قامت باختراع جهاز آخر بمكونات مختلفة ولكنه يقوم بنفس وظيفة الجهاز الاول ثم قامت باختراع جهاز آخر عبارة عن ماتور رافع للمياه كاتم للصوت وجهاز آخر لمعالجة المياه البحرية المالحة يوضع أسفل قاع البحر ويخرج منه ماسورة لأعلى يخرج منها الماء خالى من ملوحة البحر ثم اخترعت جهاز محمول سعته ١ لتر وذلك للعاملين فى مجال البحار إذ ما أراد أن يشرب يضعه فى مياه البحر لمدة دقيقتين ثم يرفعه ويشرب مياه نقية و غيرها من الاختراعات.

نظرية الدوائر المتتالية

إذا تماست عدة دوائر من الخارج مثنى مثني بحيث كل منهم تمس مستقيمان متقاطعان بزاوية تقاطع $= 2\theta$ ، فإذا اعتبرنا الدائرة الأساسية C نصف قطرها R فإن :

$$R_N = R\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^N , \quad R_{-N} = R\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^N$$

حيث :

- R هو نصف قطر الدائرة الأساسية C .
- R_N هو نصف قطر الدائرة رقم N في سلسلة الدوائر الكبرى ابتدأً من الدائرة C_1 .
- R_{-N} هو نصف قطر الدائرة رقم –N في سلسلة الدوائر الصغرى ابتدأً من الدائرة C_{-1} .

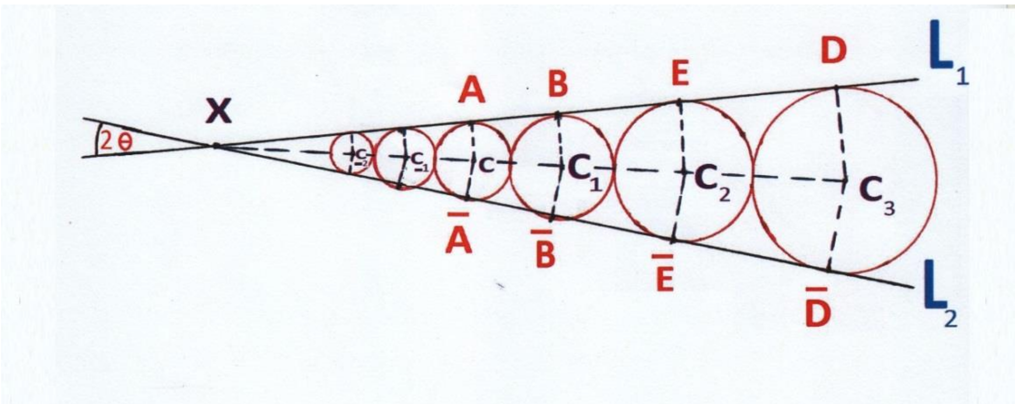


Fig (A)

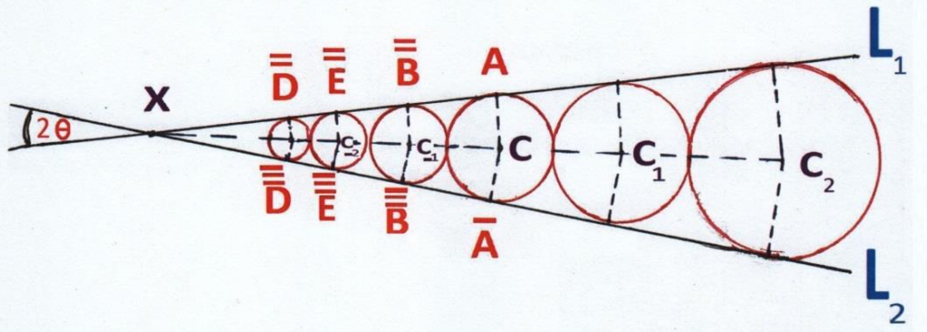
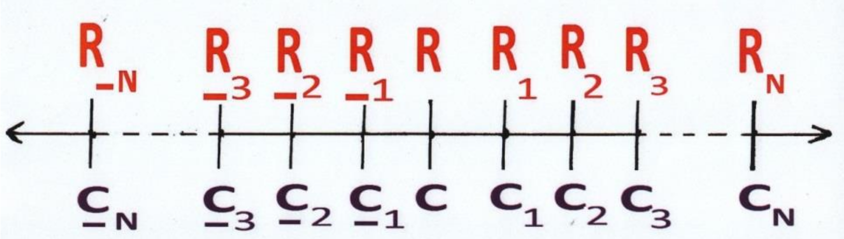


Fig (B)



خط شكشك للدوائر المتالية

Fig (C)

– **N** هو رقم تسلسل الدوائر في سلسلة الدوائر الكبرى ابتداء من الدائرة C_1 .

– **N-** هو رقم تسلسل الدائرة في سلسلة الدوائر الصغرى ابتدأ من الدائرة C_{-1} .

- θ هي نصف زاوية المتقاطع بين المستقيمين L_1 , L_2 .

* تمهيد :

كما في الشكل Fig (A) , Fig (B) نجد أن في أي منهما مستقيمان متقاطعان في النقطة X ويحصران بينهما زاويـة تقاطع من ناحية الدوائر قدرها 2θ ويمس المستقيمان عدة دوائر متماسة مثنى مثنى من الخارج ونجد في Fig (A) الدائرة الأساسية C ذات نصف قطر R والدوائر بعد ذلك تزداد في المساحة C_1 و C_2 و .... و C_N وهكذا مكونة (سلسلة الدوائر الكبرى) . ذات أنصاف أقطار R_1 و R_2 و .... و R_N .

وفي Fig (B) نجد الدائرة C الأساسية ثم تليها C_{-1} و C_{-2} و ... و C_{-N} وهكذا مكونة (سلسلة الدوائر الصغرى) .

ويمثل ذلك Fig (C) الذي مثل خط شكشك للدوائر المتتالية وهنا بمعلومية نصف قطر الدائرة الأساسية وهو R وبمعلومية الزاوية θ يمكننا إيجاد نصف قطر أي دائرة من السلسلة الكبرى أو الصغرى وذلك بالتطبيق في قوانين النظرية .

* المعطيات :

في شكل Fig (A) :

L_2 و L_1 مستقيمان متقاطعان في النقطة X وكل من C و C_1 و C_2 و ... و C_N هم دوائر متماسة مثنى مثنى من الخارج وكل دائرة منهم

تمس كل من المستقيمان المتقاطعان L_2 و L_1 فتمس L_1 في A و B و E و D .

كما تمس L_2 في $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{E}$, $\bar{D}$ كما أن كل من الدوائر C_1 و C_2 و C_3 و … و C_N لهم أنصاف أقطار R_1 و R_2 و R_3 و … و R_N علي الترتيب.

في شكل Fig (B) :

L_1 و L_2 مستقيمان متقاطعان في النقطة X وكل من C و C_{-1} و C_{-2} و C_{-3} و … و C_{-N} هم دوائر متماسة مثنى مثنى من الخارج ولهم أنصاف أقطار R و R_{-1} و R_{-2} و R_{-3} و … و R_N وفي نفس الوقت يمسوا كل من المستقيم L_1 في A , $\bar{\bar{B}}$, $\bar{\bar{E}}$, $\bar{\bar{D}}$ كما يمسوا المستقيم L_2 في $\bar{A}$, $\bar{\bar{\bar{B}}}$, $\bar{\bar{\bar{E}}}$, $\bar{\bar{\bar{D}}}$. كما أن زاوية تقاطع المستقيمان تساوى 2θ .

* المطلوب :

إثبات أن :

$$R_N = R\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^N \quad , \qquad R_{-N} = R\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^N$$

* العمل : في الشكل Fig (A) :

نصل كل من C , C_1 , C_2 , C_3 بنقطة تقاطع المستقيمان L_1 , L_2 .

نصل كل من C بالنقاط A , $\bar{A}$.

, C_1 بالنقاط B , $\bar{B}$.

, C_2 بالنقاط E , $\bar{E}$.

, C_3 بالنقاط D , $\bar{D}$.

في الشكل **Fig (B)** :

نصل كل من النقاط C , C_{-1} , C_{-2} , C_{-3} بنقطة تقاطع المستقيمان L_1 و L_2 . نصل كل من C بالنقاط A و $\bar{A}$ و

C_{-1} بالنقاط $\bar{B}$, $\bar{\bar{B}}$,

C_{-2} بالنقاط $\bar{E}$, $\bar{\bar{E}}$,

C_{-3} بالنقاط $\bar{D}$, $\bar{\bar{D}}$.

* البرهان :

بالنظر في **Fig (A)** نجد أن كل من المستقيمان L_1 و L_2 متقاطعان في النقطة X وأن زاوية التقاطع لهما من ناحية الدوائر هي 2θ .

- أولاً : نبرهن القانون الأول

في المثلثان $\Delta\, XCA$ و $\Delta\, XC\bar{A}$ نجد أن :

(مماسان لدائرة من نقطة) $XA = X\bar{A}$

(أنضاف أقطار دائرة) $CA = C\bar{A}$,

(مشترك) XC ,

$\therefore$ ينطبق المثلثان وينتج أن : $\angle CXA = \angle CX\bar{A} = \theta$

وبنفس الطريقة يكون :

$$\angle C_1XB = \angle C\,X\bar{B} \quad , \quad \angle C_2XE = \angle\ C_2X\bar{E} \qquad \angle C_3XD = \angle C_3X\bar{D}$$

∴ كل من XC , XC_1 , XC_2 , XC_3 هم منصفات للزاوية $\angle D X \bar{D}$

∴ كل من XC , XC_1 , XC_2 , XC_3 منطبقين علي بعض

أي أنه C , C_1 , C_2 , C_3 يقطعوا جميعاً علي استقامة واحدة .

* بالمثل في شكل Fig (B) يكون كل من النقاط $C , C_{-1} , C_{-2} ,$ C_{-3} يقعوا علي استقامة واحد .

* في Fig (A) :

∵ المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلي نقطة التماس لمماس في الدائرة يكون عمودى علي المماس . لذلك نجد أن كل من المثلثات $\Delta\, CXA$, $\Delta\, C_1XB$, $\Delta\, C_2XE$, $\Delta\, C_3XD$ متشابهين .

* بالمثل في Fig (B) يكون كل من المثلثات

$\Delta\, CXA$, $\Delta C_{-1}X\bar{\bar{B}}$, $\Delta\, C_{-2}X\bar{\bar{E}}$, $\Delta C_{-3}X\bar{\bar{D}}$ *متشابهين* .

* في Fig (A) :

$$CX = R \operatorname{cosec} \theta$$

$$C_1X = R_1 + R + R \operatorname{cosec} \theta$$

$$C_2X = R_2 + 2R_1 + R + R \operatorname{cosec} \theta$$

$$C_3X = R_3 + 2R_2 + 2R_1 + R + R \operatorname{cosec} \theta$$

من تشابه المثلثان $\Delta\, XCA$ و $\Delta\, XC_1B$ يكون :

$$\frac{R}{R_1} = \frac{CX}{C_1X} = \frac{R \operatorname{cosec} \theta}{R_1 + R + R_2 \operatorname{cosec} \theta}$$

$$\therefore \quad R_1 = \frac{RR_1 + R^2 + R^2 \ \mathrm{cosec}\,\theta}{R \ \mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$= \frac{R\ (R_1 + R + R \ \mathrm{cosec}\,\theta)}{R \ \mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$= \frac{R_1 + R + R \ \mathrm{cosec}\ \theta}{\mathrm{cosec}\ \theta}$$

$$\therefore \quad R_1 = \frac{R_1}{\mathrm{cosec}\,\theta} + \frac{R}{\mathrm{cosec}\,\theta} + \frac{R \ \mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$\therefore \quad R_1 - \frac{R_1}{\mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{R}{\mathrm{cosec}\,\theta} + \frac{R \ \mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{R_1 \ \mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta} - \frac{R_1}{\mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{R}{\mathrm{cosec}\,\theta} + \frac{R \ \mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{R_1 \ \mathrm{cosec}\,\theta - R_1}{\mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{R + R \ \mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$\therefore \quad R_1 \ (\mathrm{cosec}\,\theta - 1) = R\ (1 + \mathrm{cosec}\,\theta)$$

$$\therefore \quad R_1 = R \ \frac{(\mathrm{cosec}\,\theta + 1)}{\mathrm{cosec}\,\theta - 1}$$

$$\therefore \quad R_1 = R \ \frac{(1 + \sin\theta)}{(1 - \mathrm{in}\,\theta)} \qquad \dots\dots\dots\dots \ (1)$$

$$* \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{XC_1}{XC_2} = \frac{R_1 \ \mathrm{cosec}\,\theta}{R_2 + R_1 + R_1 \ \mathrm{cosec}\,\theta}$$

بقسمة طرفي المعادلة علي R_1 .

$$\therefore \quad R_2 = \frac{R_2 + R_1 + R_1 \ \mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$= \frac{R_2}{\mathrm{cosec}\,\theta} + \frac{R_1\ (\mathrm{cosec}\,\theta + 1)}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$\therefore \quad R_2 - \frac{R_2}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{R_1\,(\operatorname{cosec}\theta + 1)}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{R_2\ \operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta} - \frac{R_2}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{R_1\,(\operatorname{cosec}\theta + 1)}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\therefore \quad R_2\ \operatorname{cosec}\theta - R_2 = R_1\,(\operatorname{cosec}\theta + 1)$$

$$\therefore \quad R_2\,(\operatorname{cosec}\theta - 1) = R_1\,(\operatorname{cosec}\theta + 1)$$

$$\therefore \quad R_2 = R_1\,\frac{(\operatorname{cosec}\theta + 1)}{(\operatorname{cosec}\theta - 1)}$$

$$\therefore \quad R_2 = R_1 \left(\frac{\frac{1}{\sin\theta} + 1}{\frac{1}{\sin\theta} - 1} \right) =$$

$$= R_1 \left(\frac{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\sin\theta}} \right) =$$

$$= R_1 \left(\frac{\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}} \right) =$$

$$= R_1 \left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \right)$$

$$= R \left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \right) \left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \right)$$

$$\therefore \quad R_2 = R \left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \right)^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \ (2)$$

$$* \quad \frac{R_2}{R_3} = \frac{R_2\ \operatorname{cosec}\theta}{R_3 + R_2 + R_2\ \operatorname{cosec}\theta}$$

$$\therefore \quad R_3 = \frac{R_3 + (R_2 + R_2\ \operatorname{cosec}\theta)}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \frac{R_3}{\operatorname{cosec}\theta} + \frac{R_2\ (\operatorname{cosec}\theta\ + 1\ )}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\therefore\quad R_3 - \frac{R_3}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{R_2\ (\operatorname{cosec}\theta\ + 1\ )}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\therefore\quad \frac{R_3 \operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta} - \frac{R_3}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{R_2\ (\operatorname{cosec}\theta + 1\ )}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\therefore\quad R_3 \operatorname{cosec}\theta\ - R_3 = R_2\ (\operatorname{cosec}\theta + 1)$$

$$\therefore\quad R_3\ (\text{casec}\ \theta - 1)\ = R_2\ (\operatorname{cosec}\theta + 1)$$

$$\therefore\quad R_3 = R_2\left(\frac{\operatorname{cosec}\theta + 1}{\operatorname{cosec}\theta - 1}\right)$$

$$\therefore\ R_3\ = R_2\frac{\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\sin\theta}\right)} =$$

$$= R_2\frac{\left(\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\right)}{\left(\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}\right)} =$$

$$= R_2\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$$

$$\therefore\ R_3 = R\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^2\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$$

$$\therefore\ R_3\ = R\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^3 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\ (3)$$

*** From (1) , (2) and (3) , we find that :**

$$R_N\ = R\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^N$$

وهو المطلوب أولاً .

- **In Fig (B) :** $(CX = R \operatorname{cosec} \theta)$

من تشابه المثلثان $\Delta\ X\bar{\bar{B}}C_{-1}$ و $\Delta\ XAC$ يكون :

$$\frac{R}{R_{-1}} = \frac{CX}{C_{-1}X} = \frac{R \operatorname{cosec} \theta}{R \operatorname{cosec} \theta - R - R_{-1}}$$

$$\therefore \quad R_{-1} = \frac{R^2 \operatorname{cosec} \theta - R^2 - R\,R_{-1}}{R \operatorname{cosec} \theta}$$

$$= \frac{R\ (R \operatorname{cosec} \theta - R - R_{-1})}{R \operatorname{cosec} \theta}$$

$$= \frac{R \operatorname{cosec} \theta - R - R_{-1}}{\operatorname{cosec} \theta}$$

$$= \frac{R \operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta} - \frac{R}{\operatorname{cosec} \theta} - \frac{R_{-1}}{\operatorname{cosec} \theta}$$

$$\therefore \quad R_{-1} + \frac{R_{-1}}{\operatorname{cosec} \theta} = \frac{R \operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta} - \frac{R}{\operatorname{cosec} \theta}$$

$$\therefore \quad \frac{R_{-1} \operatorname{cosec} \theta}{\operatorname{cosec} \theta} + \frac{R_{-1}}{\operatorname{cosec} \theta} = \frac{R \operatorname{cosec} \theta - R}{\operatorname{cosec} \theta}$$

$$\therefore \quad R_{-1} \operatorname{cosec} \theta + R_{-1} = R\ (\operatorname{cosec} \theta - 1)$$

$$\therefore \quad R_{-1} (\operatorname{cosec} \theta + 1) = R\ (\operatorname{cosec} \theta - 1)$$

$$\therefore \quad R_{-1} = R\ \frac{(\operatorname{cosec} \theta - 1)}{(\operatorname{cosec} \theta + 1)}$$

$$\therefore \quad R_{-1} = R\ \frac{\left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\sin \theta}\right)}{\left(\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} + \frac{\sin \theta}{\sin \theta}\right)}$$

$$\therefore \quad R_{-1} = R\ \frac{(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)} \qquad \dots\dots\dots\dots (4)$$

$$* \quad \frac{R_{-1}}{R_{-2}} = \frac{R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta}{R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta - R_{-1} - R_{-2}}$$

$$\therefore \quad R_{-2} = \frac{R^2_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta - R^2_{-1} - R_{-1}\,R_{-2}}{R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$= \frac{R_{-1}\,(R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta - R_{-1} - R_{-2})}{R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$= \frac{R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta - R_{-1} - R_{-2}}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$= \frac{R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta} - \frac{R_{-1}}{\mathrm{cosec}\,\theta} - \frac{R_{-2}}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$\therefore \quad R_{-2} + \frac{R_{-2}}{\mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta} + \frac{R_{-1}}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{R_{-2}\,\mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta} + \frac{R_{-2}}{\mathrm{cosec}\,\theta} = \frac{R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta} - \frac{R_{-1}}{\mathrm{cosec}\,\theta}$$

$$\therefore \; R_{-2}\,\mathrm{cosec}\,\theta + R_{-2} = R_{-1}\,\mathrm{cosec}\,\theta - R_{-1}$$

$$\therefore \; R_{-2}\,(\mathrm{cosec}\,\theta + 1) = R_{-1}\,(\mathrm{cosec}\,\theta - 1)$$

$$\therefore \; R_{-2} = R_{-1}\,\frac{(\mathrm{cosec}\,\theta - 1)}{(\mathrm{cosec}\,\theta + 1)}$$

$$\therefore \; R_{-2} = R_{-1}\,\frac{\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta}}$$

$$= R_1 \left(\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}\right)$$

$$\therefore \quad R_{-2} = R\left(\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}\right)\left(\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}\right)$$

$$\therefore \quad R_{-2} = R\left(\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(5)$$

$$* \quad \frac{R_{-2}}{R_{-3}} = \frac{R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta}{R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta - R_2 - R_3}$$

$$\therefore \quad R_{-3} = \frac{R_{-2}^2\ \operatorname{cosec}\theta - R_{-2}^2 - R_{-2}R_{-3}}{R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \frac{R_{-2}\left(R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta - R_{-2} - R_{-3}\right)}{R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \frac{R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta - R_{-2} - R_{-3}}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \frac{R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta} - \frac{R_{-2}}{\operatorname{cosec}\theta} - \frac{R_{-3}}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\therefore \quad R_{-3} + \frac{R_{-3}}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta} - \frac{R_{-2}}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{R_{-3}\ \operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta} + \frac{R_{-3}}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta} - \frac{R_{-2}}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$\therefore \quad R_{-3}\ \operatorname{cosec}\theta + R_{-3} = R_{-2}\ \operatorname{cosec}\theta - R_{-2}$$

$$\therefore \quad R_{-3}\ (\operatorname{cosec}\theta + 1) = R_{-2}\ (\operatorname{cosec}\theta - 1)$$

$$\therefore \quad R_{-3} = R_{-2}\left(\frac{\operatorname{cosec}\theta - 1}{\operatorname{cosec}\theta + 1}\right)$$

$$\therefore \quad R_{-3} = R_{-2}\ \frac{\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta}}$$

$$= R_{-2}\ \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\therefore \quad R_{-3} = R\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

$$\therefore \quad R_{-3} = R\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (6)$$

- **From (4) , (5) and (6) , we find that :**

$$\boldsymbol{R_{-N} = R \left(\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}\right)^{N}}$$

وهو المطلوب ثانياً.

نظرية نقاط المستويات المتقاطعة

* إذا تقاطعا مستويان فإن جميع النقاط التي تقع بين المستويين وفي جهة واحدة من لتقاطع أو في جهتين متقابلتين من التقاطع بحيث تتناسب أبعادهم عن المستويين، تقع جميعهم في مستوى واحد يقطع المستويين في نفس خط تقاطعهما.

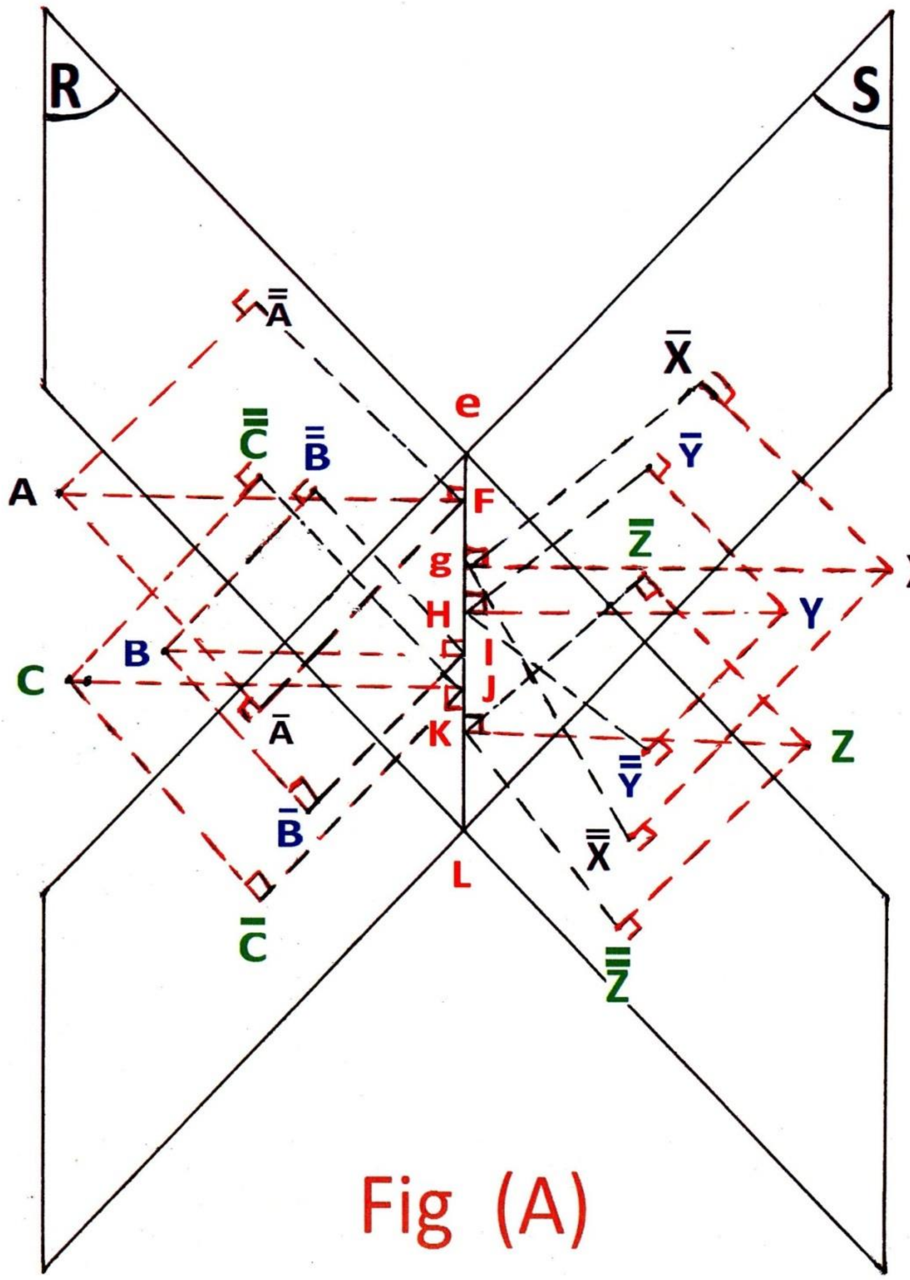

R
S
e
F
g
H
I
J
K
L
A
B
C
X
Y
Z
$\bar{\bar{A}}$
$\bar{\bar{\bar{C}}}$
$\bar{\bar{B}}$
$\bar{A}$
$\bar{B}$
$\bar{C}$
$\bar{X}$
$\bar{Y}$
$\bar{Z}$
$\bar{\bar{Y}}$
$\bar{\bar{X}}$
$\bar{\bar{\bar{Z}}}$

Fig (A)

* المعطيات :

- R , S مستويان متقاطعان في L e .

- X , Y ، Z ثلاث نقط في جهة واحدة من التقاطع ، A , B , C ثلاث نقاط في الجهة المقابلة الأخرى من التقاطع بحيث تكون كل من النقاط الستة علي أبعاد متناسبة من كل من المستويين S , R .

* المطلوب :

إثبات أن كل من النقاط Z , Y , X , C , B ، A تقطع جميعاً في مستوى واحد يتقاطع مع كل من المستويين R ، S في المستقيم L e .

* العمل :

- نسقط الأعمدة من النقاط الستة علي المستوى S فيكونوا هم : $C\bar{C}$, $B\bar{B}$, $A\bar{A}$, $Z\bar{Z}$, $Y\bar{Y}$, $X\bar{X}$.

- ثم نسقط الأعمدة من النقاط الستة على المستوى R فيكونوا هم :

$C\bar{\bar{C}}$, $B\bar{\bar{B}}$, $A\bar{\bar{A}}$, $Z\bar{\bar{Z}}$, $Y\bar{\bar{Y}}$, $X\bar{\bar{X}}$.

- ثم نسقط الأعمدة من النقاط الستة علي خط تقاطع المستويين L e فيكونوا هم CJ , IB , FA , KZ , YH , Xg .

- ثم نصل كل من :

$\bar{X}g$, $\bar{\bar{X}}g$, $\bar{Y}H$, $\bar{\bar{Y}}H$, $\bar{Z}K$, $\bar{\bar{Z}}K$, $\bar{A}F$, $\bar{\bar{A}}F$, $\bar{B}I$, $\bar{\bar{B}}I$, $\bar{C}J$, $\bar{\bar{C}}J$

* البرهان :

من المعطيات نجد أن :

$$\frac{X\bar{X}}{X\bar{\bar{X}}} = \frac{Y\bar{Y}}{Y\bar{\bar{Y}}} = \frac{Z\bar{Z}}{Z\bar{\bar{Z}}} = \frac{A\bar{A}}{A\bar{\bar{A}}} = \frac{B\bar{B}}{B\bar{\bar{B}}} = \frac{C\bar{C}}{C\bar{\bar{C}}}$$

بقسمه حدى الطرف الأول للمعادلة علي gX ،

بقسمة حدى الطرف الثاني للمعادلة على HY ،

بقسمة حدى الطرف الثالث للمعادلة علي KZ ،

بقسمة حدى الطرف الرابع للمعادلة على FA ،

بقسمة حدى الطرف الخامس للمعادلة على IB ،

بقسمة حدى الطرف السادس للمعادلة على JC

$$\therefore \quad \frac{\sin \angle Xg\bar{X}}{\sin \angle Xg\bar{\bar{X}}} = \frac{\sin \angle YH\bar{Y}}{\sin \angle YH\bar{\bar{Y}}} = \frac{\sin \angle ZK\bar{Z}}{\sin \angle ZK\bar{\bar{Z}}}$$

$$= \frac{\sin \angle AF\bar{A}}{\sin \angle AF\bar{\bar{A}}} = \frac{\sin \angle BI\bar{B}}{\sin \angle BI\bar{\bar{B}}}$$

$$= \frac{\sin \angle CJ\bar{C}}{\sin \angle CJ\bar{\bar{C}}} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

but :

$$\angle \bar{X}g\bar{\bar{X}} = \angle \bar{Y}H\bar{\bar{Y}} = \angle \bar{Z}K\bar{\bar{Z}} =$$

$$\angle \bar{A}F\bar{\bar{A}} = \angle \bar{B}I\bar{\bar{B}} = \angle \bar{C}J\bar{\bar{C}} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

ذلك لأنهم زوايا زوجية بين المستويين R ، S

From (1) and (2) , we find that :

$$\angle Xg\bar{X} = \angle YH\bar{Y} = \angle ZK\bar{Z} =$$
$$\angle AF\bar{A} = \angle BI\bar{B} = \angle CJ\bar{C}$$

وجميعهم زوايا زوجية بين المستقيمات CJ ، BI ، AF ، ZK ،

YH و Xg مع المستوى S ثلاثة منهم في جهة واحدة من المستوى S والثلاثة الآخرين في الجهة المقابلة .

وبما أن تلك الستة مستقيمات تتعامد علي خط واحد هو L e الذي ينتمي إلي المستوى S ولهم نفس الميل على المستوى S ثلاثة في جهة وثلاثة في الجهة الأخرى المقابلة .

∴ الستة مستقيمات يجمعهم مستوى واحد وليكن المستوى M .

ولكن النقاط :

$X \in Xg$, $Y \in YH$, $Z \in ZK$, $A \in AF$, $B \in BI$, $C \in CJ$.

∴ كل من النقاط : X , Y , Z , A , B , C جميعهم ينتموا إلى المستوى M .

∵ المستقيم L e ينتمى إلي كل من المستويات M , R , S .

∴ جميع النقاط X , Y , Z , A , B , C يقعوا في مستوى واحد هو المستوى M الذي يمر بخط تقاطع المستويين S , R .

وهو المطلوب إثباته .

عكس نظرية نقاط المستويات المتقاطعة

* إذا تقاطع ثلاث مستويات في خط تقاطع واحد فإن جميع النقاط التي تنتمي إلي أحدهم تكون علي أبعاد متناسبة من المستويين الآخرين .

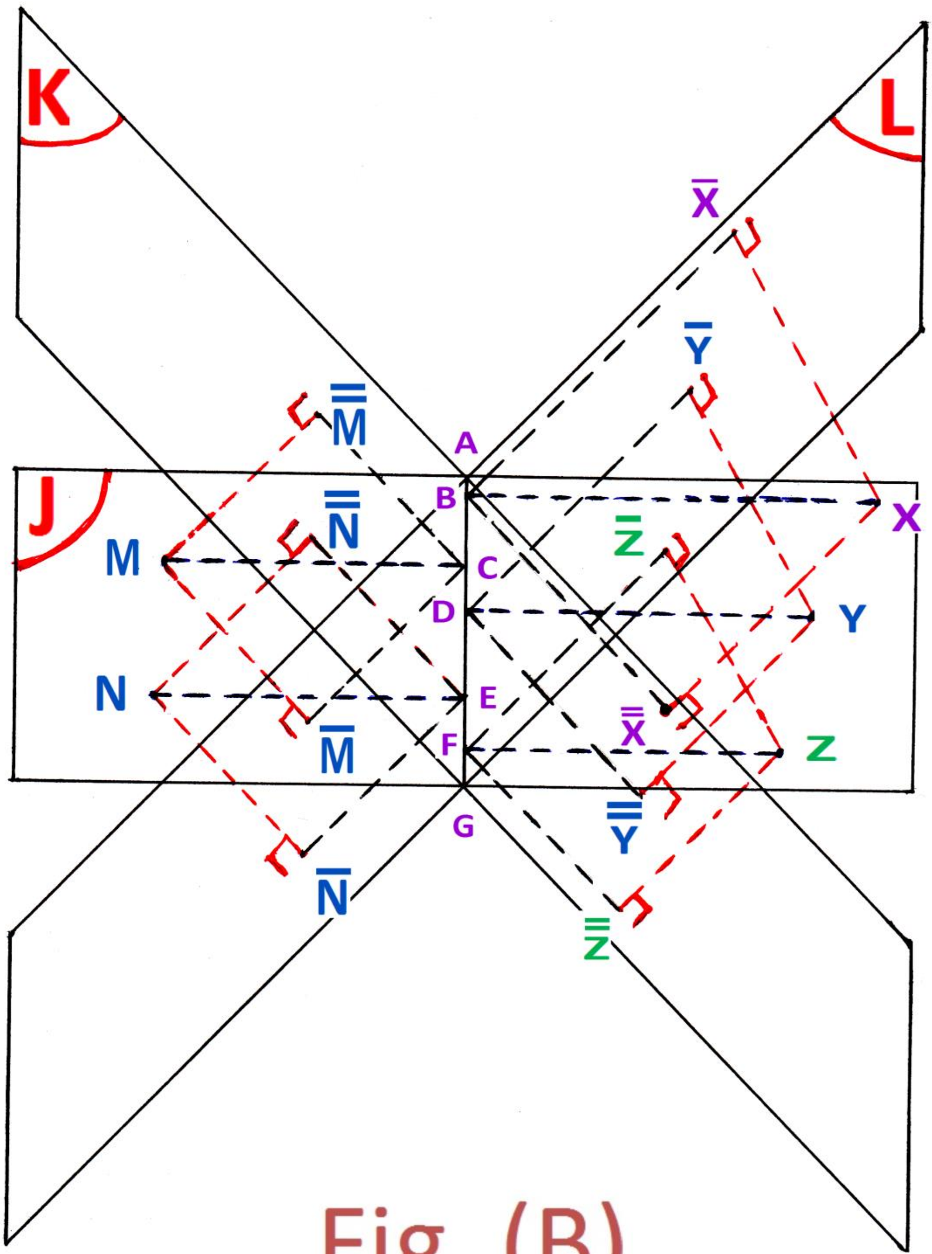


Fig (B)

*** المعطيات :**

- L , K , J ثلاث مستويات متقاطعة في المستقيم AG .

- Z , Y , X ثلاث نقاط تنتمي للمستوى J وفي جهة واحدة من التقاطع .

- N , M نقطتان أيضاً ينتموا إلي المستوى J ولكن في الجهة المقابلة من التقاطع .

*** المطلوب :**

إثبات أن كل من النقاط N , M , Z , Y , X تكون علي أبعاد متناسبة من المستويين L , K .

*** العمل :**

- نسقط من النقاط : N , M , Z , Y , X أعمدة علي المستوى L فتكون هي : $N\bar{N}$, $M\bar{M}$, $Z\bar{Z}$, $Y\bar{Y}$, $X\bar{X}$.

- ثم نسقط من النقاط : N , M , Z , Y , X أعمدة علي المستوى K فتكون هي : $N\bar{\bar{N}}$, $M\bar{\bar{M}}$, $Z\bar{\bar{Z}}$, $Y\bar{\bar{Y}}$, $X\bar{\bar{X}}$.

- ثم نسقط من النقاط: N , M , Z , Y , X أعمدة علي خط التقاطع AG فتكون هي : NE , MC , ZF , YD , XB علي الترتيب .

- ثم نصل بين كل من :

$B\bar{X}$, $B\bar{\bar{X}}$, $D\bar{Y}$, $D\bar{\bar{Y}}$, $F\bar{Z}$, $F\bar{\bar{Z}}$, $C\bar{M}$, $C\bar{\bar{M}}$, $E\bar{N}$, $E\bar{\bar{N}}$

* البرهان :

- بالنظر في **Fig (B)** نجد أن كل من :

$$\angle XB\bar{X} \ , \ \angle YD\bar{Y} \ , \ \angle ZF\bar{Z}$$

جميعهم مقياس للزاوية الزوجية بين المستوين J , L .

$$\therefore \quad \angle XB\bar{X} = \angle YD\bar{Y} = \angle ZF\bar{Z}$$

وأيضاً بالمثل:

$$\angle XB\bar{\bar{X}} = \angle YD\bar{\bar{Y}} = \angle ZF\bar{\bar{Z}}$$

- أي أن كل من النقط X , Y , Z إذا سقطت أعمدة من كل منهم علي خط التقاطع بين المستويين J , L فإن تلك الأعمدة تصنع مع المستوى K زوايا متساوية .

- كل من المثلثان $\Delta YD\bar{Y}$, $\Delta XB\bar{X}$ متشابهان وذلك لتساوى الزوايا المتناظرة بينهم .

$$\therefore \quad \frac{X\bar{X}}{BX} = \frac{Y\bar{Y}}{DY}$$

$$\therefore \quad \frac{X\bar{X}}{Y\bar{Y}} = \frac{BX}{DY} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (1)$$

بالمثل في المثلثان $\Delta YD\bar{\bar{Y}}$, $\Delta XB\bar{\bar{X}}$ أيضاً متشابهان لتساوى الزوايا المتناظرة بينهم فيكون :

$$\frac{X\bar{\bar{X}}}{Y\bar{\bar{Y}}} = \frac{BX}{DY} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \ (2)$$

From (1) and (2) , we find :

$$\frac{X\bar{X}}{Y\bar{Y}} = \frac{X\bar{\bar{X}}}{Y\bar{\bar{Y}}}$$

نستنتج من ذلك أن أبعاد كل من النقطتين Y , X عن المستويين L , K تكون متناسبة .

كما أنه يمكن بنفس الطريقة إثبات أن أكثر من ألف نقطة تنتمي للمستوى J يكونوا علي أبعاد متناسبة من المستويين L , K وبنفس الطريقة في الجهة الأخرى للنقطتين M , N يمكن إثبات أن كل منهم علي أبعاد متناسبة من المستويين L , K .

وهو المطلوب إثباته

نتيجة

*** إذا تقاطع مستويان فإن جميع الكور التي تمس المستويان من جهة واحدة أو من جهتين متقابلتين من التقاطع، تقع مراكزها جميعاً في مستوى واحد يقع بين المستويين من جهة الكور ويقسم الزاوية الزوجية بين المستويين المتقاطعين من جهة الكور إلي نصفين متساويين .**

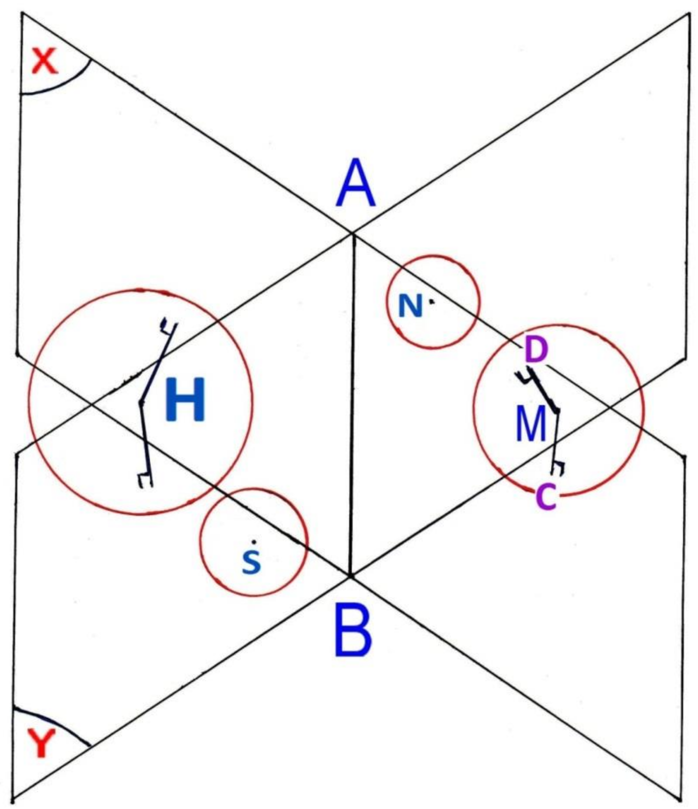


Fig (C)

* المعطيات :

Y ، X مستويان متقاطعان في المستقيم **A B** ، الكرتان **N , M** يمسان المستويان **Y , X** ، والكرتان **S , H** في الجهة الأخرى المقابلة من التقاطع ويمسان المستويان **Y , X** أيضاً مع ملاحظة أن الكرة **M** تمس المستويان **Y , X** في النقطتين **D ، C** علي الترتيب .

* المطلوب:

إثبات أن كل من مراكز الكور **S , H , N , M** تقع جميعاً في مستوى واحدة بقسم الزاوية الزوجية بين المستوين **Y ، X** من جهة الكور إلي نصفين متساويين .

* البرهان:

كما في **Fig (C)** نجد أن الكرة **M** تمس كل من المستويان **Y , X** في **D , C** علي الترتيب ، ولكن المستوى **X** تمس الكرة **M** وينتج من ذلك أن نصف القطر **MC** يكون عمودي علي المستوى **X** ، نفس الشئ **MD** عمودي علي المستوى **Y** .

but **MC = MD**

أي أن مركز الكرة **M** عي أبعاد متساوية من المستويين **Y ، X** .

وكذلك جميع مراكز الكور بالمثل علي أبعاد متساوية من المستويين **Y ، X**

أي أن جميع مراكز الكور علي أبعاد متناسبة من المستويين **Y ، X** بنسبة **1 : 1** .

∴ جميع مراكز الكور تقع جميعاً في مستوى واحد .

∵ نسب الأبعاد لجميع المراكز **1 : 1** .

∴ مستوى مراكز الكرة بقسم الزاوية الزوجية بين المستويين **Y ، X** إلي نصفين متساويين .

وهو المطلوب إثباته

نظرية دوران المثلث

* لأي مثلث إذا دار المثلث حول أحد أضلاعه فإنه ينتج مجسم حجمه =

$$\frac{1}{3}\pi L X^2 \frac{\theta}{360}$$

حيث :

L هو ضلع محور الدوران للمثلث .

، X هو ارتفاع المثلث علي ضلع الدوران .

، θ هي زاوية الدوران .

* أولا : في حالة المثلث حاد الزوايا :

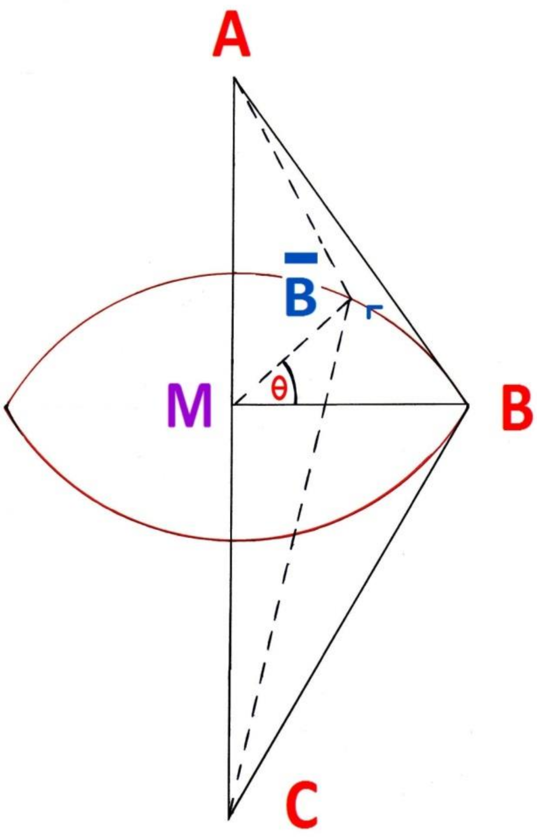


Fig (A)

* المعطيات :

ABC مثلث يدور حول الضلع AC بزاوية θ فيتكون الجسم $AB\bar{B}C$

* المطلوب :

إثبات أن حجم الجسم

$$\frac{1}{3}\,\pi\, L\, X^2 \;\frac{\theta}{360} \;=\; AB\bar{B}C$$

* العمل :

نسقط العمود BM على AC وبذلك يكون BM هو نصف القطر للدائرة الناشئة عن دوران النقطة B حول الضلع AC .

* البرهان :

- نفترض أن المثلث ABC دار بزاوية $= 360^o$ فسيشكل مخروطان مشتركان في القاعدة الدائرية $B\bar{B}D$ التي نصف قطرها هو $BM = X$ وهي ارتفاع المثلث علي ضلع الدوران AC .

$\because$ مساحة القاعدة المشتركة للمخروطان $= \pi X^2$

و $\because$ إرتفاع أحد المخروطان هو AM والآخر هو CM

$\therefore$ حجم المخروطان =

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 (AM) + \frac{1}{3}\pi X^2 (CM) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 (AM + CM) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 (AC) = \frac{1}{3}\pi X^2 L$$

وذلك باعتبار أننا نمثل طول الضلع AC يساوى الرمز L .

ولكن إذا دار المثلث بزاوية θ أقل من 360^o فيكون :

حجم المجسم الناتج =

$$= \frac{1}{3}\pi L X^2 \frac{\theta}{360}$$

وهو المطلوب إثباته .

* ثانياً في حالة المثلث المنفرج :

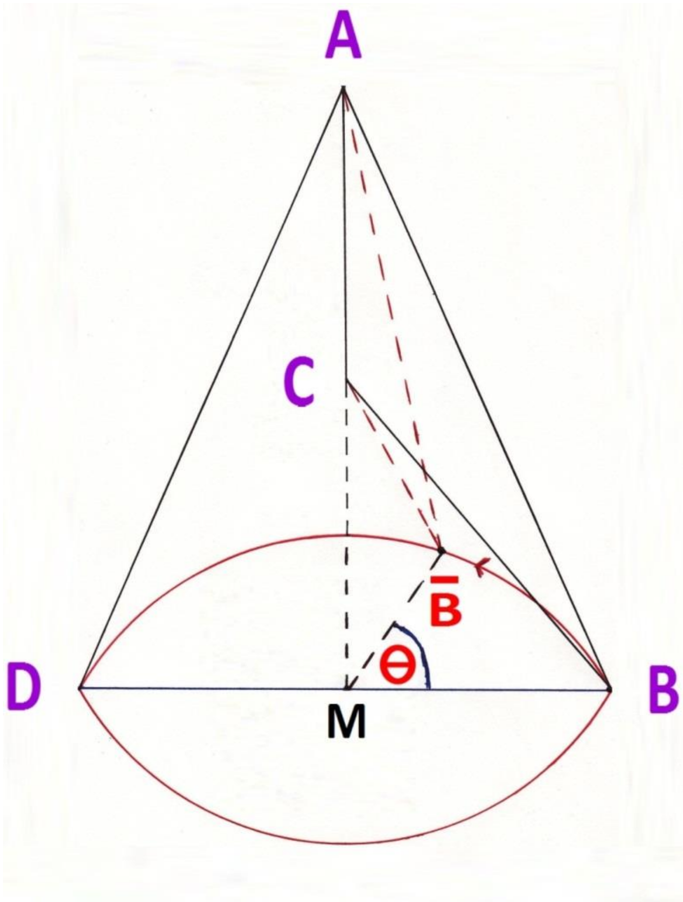


Fig (B)

* **المعطيات :** المثلث ABC Δ منفرج الزاوية في C ويدور حول الضلع AC بزاوية θ .

* **المطلوب :**

إثبات أن حجم المجسم الناتج من دوران المثلث حول الضلع AC بزاوية θ =

$$\frac{1}{3} = \frac{\theta}{360} \pi LX^2$$

* العمل :

– نرسم الدوران للمثلث دورة كاملة حول **AC** فيتكون :

مخروط كبير هو $AB\bar{B}D$

ومخروط فارغ هو $CB\bar{B}D$

– نمد **AC** علي استقامته فيقابل القاعدة الدائرية $B\bar{B}D$ المشتركة للمخروطان في **M** فتكون **M** هي مركز الدائرة للقاعدة المشتركة للمخروطين .

– نصل **BM** فيكون هو ارتفاع المثلث Δ **ABC** علي ضلع الدوران **AC** ويرمز للارتفاع بالرمز **X** .

* البرهان :

نفرض أن المثلث Δ **ABC** قد دار بزاوية 360^{o} فيشكل مخروطان مشتركان في قاعدة واحدة هي $B\bar{B}D$ وهي علي شكل دائرة نصف قطرها هو ارتفاع المثلث **ABC** علي ضلع الدوران **AC** ويرمز للارتفاع بالرمز **X** .

$\therefore$ مساحة القاعدة الدائرية المشتركة للمخروطان $= \pi X^2$.

– ارتفاع المخروط الكبير هو **AM** .

، ارتفاع المخروط الأجوف هو **CM** .

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن دوران المثلث **ABC** حول الضلع **AC** دورة كاملة

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \ (AM) - \frac{1}{3}\pi X^2 \ (CM) =$$

$$= \frac{1}{3}\ \pi\ X^2\ (AM - CM)\ =\ \frac{1}{3}\ \pi\ X^2\ (AC)$$

$$= \frac{1}{3}\ \pi\ L\ X^2$$

ولكن إذا دار المثلث بزاوية θ أقل من 360^o .

∴ حجم المجسم الناتج عن الدوران =

$$= \frac{1}{3}\ \pi\ X^2\ L\ \ \frac{\theta}{360}$$

وهو المطلوب .

نتيجة لنظرية دوران المثلث

* إذا دار المثلث بزاوية θ حول أضلاعه الثلاثة فإنه يكون ثلاث مجسمات النسبة بين أحجامها علي الترتيب كنسبة بين ارتفاعات المثلث الثلاثة .

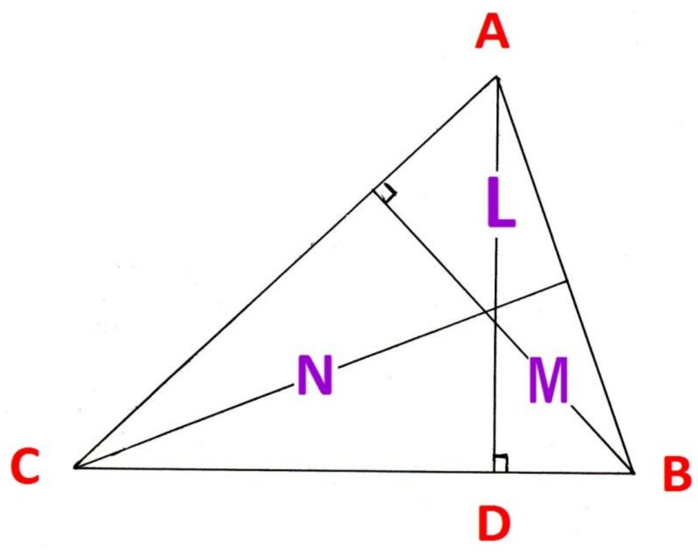


Fig (C)

* في Fig (C) : نفرض أن المثلث Δ ABC فيه :

N هو ارتفاع المثلث علي AB .

, X هو ارتفاع المثلث علي BC .

, M هو ارتفاع المثلث علي AC .

– ونفرض أن المثلث قد دار حول كل من أضلاعه الثالثة بنفس زاوية الدوران θ

– $\therefore$ حجم مجسم الدوران حول AB =

$$= \frac{1}{3} \pi N^2 (AB) \frac{\theta}{360} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

- حجم مجسم الدوران حول BC =

$$= \frac{1}{3}\ \pi\ X^2\ (BC)\ \frac{\theta}{360} \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

- حجم مجسم الدوران حول AC =

$$= \frac{1}{3}\ \pi\ M^2\ (AC)\ \frac{\theta}{360} \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

بقسمة *(3)* و *(2)* و *(1)* على $\frac{1}{3}\ \pi\ \frac{\theta}{360}$

∴ النسبة بين :

مجسم الدوران حول AB : مجسم الدوران حول BC : مجسم الدوران حول AC =

$$= (AB)\ N^2\ :\ (BC)\ X^2\ :\ (AC) M^2 \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

but :

$$(AB)\ N = (BC)\ X = (AC)\ M$$

لأن كل منهم يساوى ضعف مساحة $\Delta\ ABC$

∴ بقسمة (4) علي ضف مساحة $\Delta\ ABC$ يكون :

∴ مجسم الدوران حول AB : مجسم الدوران حول BC : مجسم الدوران AC

$$= N\ :\ X\ :\ M$$

أي أن النسبة بين الثلاث مجسمات الناتجة من دوران المثلث ABC حول الثلاث أضلاع بزاوية θ هي كالنسبة بين الارتفاعات الثلاثة للمثلث .

وهو المطلوب إثباته .

نظرية دوران شبه المنحرف

* في أي شبه منحرم ارتفاعه X يكون :

- إذا دار شبه المنحرف حول القاعدة الكبرى بزاوية θ فإنه ينتج مجسم حجمه =

$$= \frac{1}{3} \pi X^2 \frac{\theta}{360} \left(2 \text{ القاعدة الصغرى } + \text{ القاعدة الكبرى} \right)$$

- إذا دار شبه المنحرف حول القاعدة الصغرى بزاوية θ فإنه ينتج مجسم حجمه =

$$= \frac{1}{3} \pi X^2 \frac{\theta}{360} \left(2 \text{ القاعدة الكبرى } + \text{ القاعدة الصغرى} \right)$$

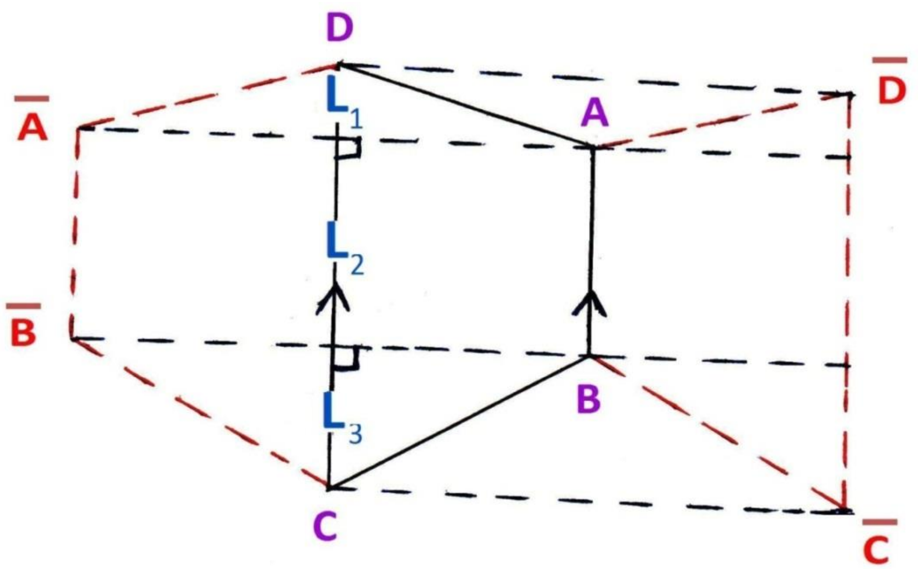


Fig (A)

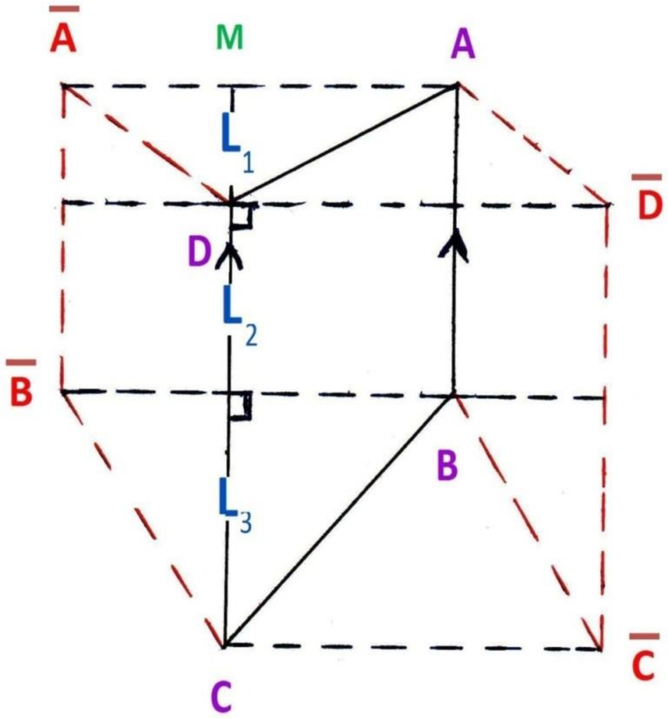


Fig (B)

* المعطيات :

في Fig (A) , (B) نجد أن ABCD شبه منحرف فيه CD > AB ويوازيه .

* المطلوب :

إثبات المعادلتان (1) و (2) في منطوق النظرية :

* العمل :

في Fig (A) , Fig (B) . نرسم صورة شبه المنحرف باعتبار AB محور تماثل مرّة ومرة أخرى باعتبار CD محور تماثل فيكونان كما بالشكلين Fig (A) , (B) .

* البرهان :

أولاً للشكل Fig (A) :

بالدوران حول CD دورة كاملة سينتج ثلاث مجسمات هما (المخروط $DA\bar{A}$, الاسطوانة $AB\bar{B}\bar{A}$, والمخروط $CB\bar{B}$) .

فيكون مجموع أحجامهم =

$$= \left(\frac{1}{3}\pi X^2 L_1 + \frac{3}{3}\pi X^2 L_2 + \frac{1}{3}\pi X^2 L_3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \left(L_1 + 3L_2 + L_3 \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \left(\text{2 القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى} \right)$$

.... (1)

* بالدوران حول AB دورة كاملة سينتج (أسطوانة $DC\bar{C}\bar{D}$ - مخروط $D\bar{D}A$ - مخروط $BC\bar{C}$) أحجامهم =

$$= \frac{3}{3}\pi X^2 (L_1 + L_2 + L_3) - \frac{1}{3}\pi X^2 L_3 - \frac{1}{3}\pi X^2 L_1 = \frac{1}{3}\pi X^2 \left(3L_1 + 3L_2 + 3L_3 - L_3 - L_1 \right) = \frac{1}{3}\pi X^2 \left(2L_1 + 2L_3 + 3L_2 \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \left(\text{2 القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى} \right) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

* وعند الدوران بزاوية θ فقط وليس دورة كاملة يكون :

١) حجم المجسم بالدوران حول القاعدة الكبرى بزاوية θ .

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \frac{\theta}{360}\left(\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى } 2\right)$$

٢) حجم المجسم بالدوران حول القاعدة الصغرى بزاوية θ =

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \frac{\theta}{360}\left(\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى } 2\right)$$

* ثانيا للشكل Fig (B) :

* بالدوران حول CD دورة كاملة سينتج (المخروط $CB\bar{B}$ + إسطوانة $AB\bar{B}\bar{A}$ – المخروط $DA\bar{A}$)

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 L_3 + \frac{3}{3}\pi X^2 (L_1 + L_2) - \frac{1}{3}\pi X^2 L_1$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 (L_3 + 3L_1 + 3L_2 - L_1) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 [(L_2 + L_3) + (2L_1 + 2L_2)]$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 [(L_2 + L_3) + 2(L_1 + 2L_2)]$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \left(\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى } 2\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

* بالدوران دورة كاملة حول AB سينتج

(المخروط $A\bar{D}D$ + الأسطوانة $DC\bar{C}\bar{D}$ – المخروط $B\bar{C}C$)

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 L_1 + \frac{3}{3}\pi X^2 (L_2 + L_3) - \frac{1}{3}\pi X^2 L_3$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 (L_1 + 3L_2 + 3L_3 - L_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 [(L_1 + L_2) + (2L_2 + 2L_3)]$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 (L_1 + L_2) + 2(L_2 + L_3)$$

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \left(\text{2 القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى}\right)$$

* وعند الدوران بزاوية θ فقط وليس دورة كاملة يكون :

١) حجم المجسم بالدوران حول القاعدة الكبرى CD .

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \frac{\theta}{360}\left(\text{2 القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى}\right)$$

٢) حجم المجسم بالدوران حول القاعدة الصغرى AB =

$$= \frac{1}{3}\pi X^2 \frac{\theta}{360}\left(\text{2 القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى}\right)$$

وهو المطلوب .

نتيجة

* إذا دار شبه المنحرف حول كل من قاعدتيه بزاوية θ فإن :

* الفرق بين حجمي المجسمين الناتجين =

$$= \frac{\theta}{360}\pi X^2 \frac{1}{3}\left(\text{القاعدة الكبرى} - \text{القاعدة الصغرى}\right)$$

* مجموع المجسمين الناتجين =

$$= \frac{\theta}{360}\, \pi\, X^2\, \frac{1}{3} \left(\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى} \right)$$

الإثبات

نفرض أن المجسمين هما A , B فيكون :

$$* \quad A - B = \frac{1}{3} \pi X^2 \frac{\theta}{360} \left(\text{Small Base} + 2 \ \text{Big Base} \right)$$

$$- \frac{1}{3} \pi X^2 \frac{\theta}{360} \left(\text{Big Base} + 2 \ \text{Small Base} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \pi X^2 \frac{\theta}{360} \left(\text{Big Base} - \text{Small Base} \right).$$

$$* \quad A + B = \frac{1}{3} \pi X^2 \frac{\theta}{360} \left(\text{Small Base} + 2 \ \text{Big Base} \right)$$

$$+ \frac{1}{3} \pi X^2 \frac{\theta}{360} \left(\text{Big Base} + 2 \ \text{Small Base} \right)$$

$$= \frac{3}{3} \pi X^2 \frac{\theta}{360} \left(\text{Big Base} + \text{Small Base} \right)$$

$$= \pi X^2 \frac{\theta}{360} \left(\text{Big Base} + \text{Small Base} \right)$$

وهو المطلوب إثباته

نظرية مخاريط الكرة

حقائق وتعاريف :

١) مستوى التماثل لمجسم هندسي : هو المستوى الذي يقسم المجسم إلي نصفين متماثلين كل منهم صورة مرآة للآخر بحيث تكون كل نقطة في النصف الأول تجد ما يقابلها في النصف الآخر .

٢) زاوية رأس المخروط : هي الزاوية الناشئة من تقاطع المخروط مع مستوى تماثله .

٣) محور المخروط : هو المستقيم الواصل بين رأس المخروط ومركز قاعدته

٤) الخروط الداخلي للكرة : هو المخروط الذي ينطبق كل من رأسة ومحيط قاعدتة علي محيط الكرة .

٥) إذا انطبق محور مخروط داخلي لكرة على مستوى تماثل للكرة ، فإن مستوى التماثل هذا يكون مستوى تماثل للمخروط أيضاً .

٦) يوجد عدد لا نهائي من مستويات التماثل للكرة الذي يكون عمودي علي قاعدة مخروط محيطي قائمة للكرة، لكن لا يوجد غير مستوى تماثل واحد للكرة يمر بمطور هذا المخروط المحيطي .

٧) يوجد عدد لا نهائي من مستويات التماثل للكرة الذي يقع فيهم محور مخروط محيطي قائم لهذه الكرة، ولكن لا يوجد غير مستوى تماثل واحد يقع فيه محور مخروط مائل محيطي لهذه الكرة .

٨) المستوى الذي يقع فيه (محور مخروط داخل لكرة وقطر للكرة) هو مستوى تماثل لكل من المخروط والكرة .

٩) المخروط المحيطي للكرة : (المخروط الداخلي) هو المخروط الذي ينطبق كل من رأسه ومحيط قاعدته علي محيط الكرة .

١٠) المخروط المركزي لكرة : هو المخروط الذي تنطبق قاعدته علي محيط الكرة ولكن رأسه ينطبق علي مركز الكرة .

١١) مستوى التماثل لمخروط : هو مستوى يكون عمودي علي قاعدة المخروط ويقع فيه محور المخروط .

١٢) المخروط القائم : هو المخروط الذي يكون محوره عمودي علي قاعدته .

١٣) المخروط المائل : هو الذي يميل محورة علي قاعدته بزاوية أقل من 90^o .

١٤) المخروط القائم له عدد غير نهائي من مستويات التماثل لكن المخروط المائل ليس له غير مستوى تماثل واحد .

منطوق النظرية

* إذا اشتركت عدة مخاريط محبطة لكرة في قاعدة واحدة، فإن جميع زوايا رؤوس المخاريط تكون متساوية .

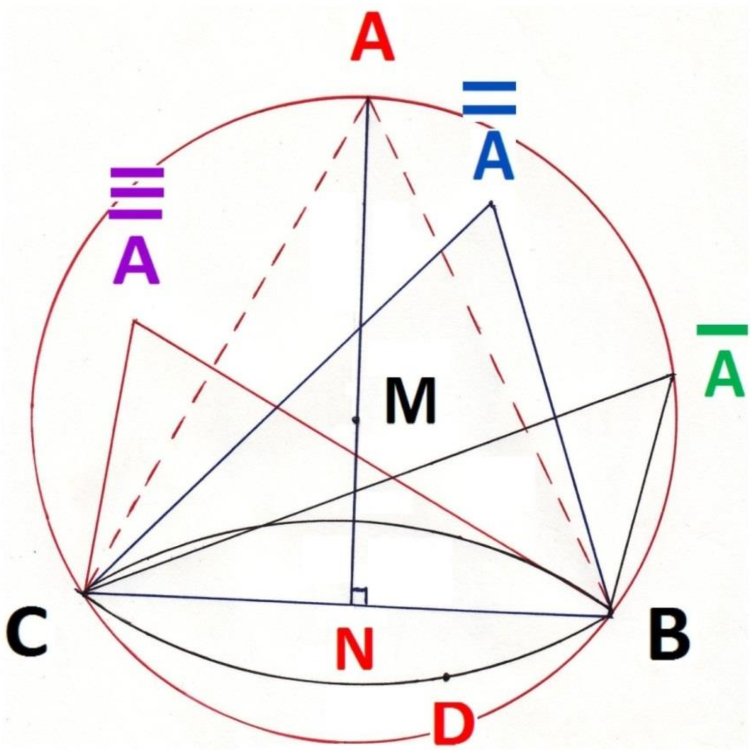


Fig (A)

* المعطيات :

$\bar{\bar{\bar{A}}}BDC$, $\bar{\bar{A}}BDC$, $\bar{A}BDC$

ثلاثة مخاريط محيطية للكرة **M** مشتركين في قاعدة واحدة دائرية مركزها **N** وقطرها **BC** .

* المطلوب :

إثبات أن زوايا رؤوس المخاريط الثلاثة تكون متساوية .

* العمل : نرسم المخروط القائم ABDC فيكون محورة مار بمركز الكرة وعمودي علي القاعدة المشتركة للمخاريط في مركزها N .

* البرهان :

المخروط ABDC مخروط قائم محوره محتواه في قطر الكرة لذلك مستوى تماثل المخروط هو أيضاً مستوى تماثل للكرة .

$\because$ المستقيم AN عمودي على مستوى قاعدة المخروط (القاعدة المشتركة) .

$\therefore$ أي مستوى يقع فيه المستقيم AN يكون عمودي على المستوى BDC .

* النقط $\bar{A}NA$ ثلاث نقط ليس على استقامة واحدة ، لذلك ينتموا إلي مستوى واحد ، وبما أن هذا المستوى يحوى AN فيكون هذا المستوى عمودي علي القاعدة المشتركة BDC ، وأيضاً يكون مستوى تماثل لكل من المخروطين ABDC , $\bar{A}BDC$ والكرة ويقطع الكرة في دائرة مركزها M ويكون CB وتر في الدائرة وكل من زاوية رأس المخروط $\bar{A}BDC$ ، زاوية رأس المخروط ABDC القائم هم زاويتان محيطيتان للدائرة M ومشتركان في القوس BC .

$$\therefore \quad \angle BAC = \angle B\bar{A}C \quad \dots\dots\dots(1)$$

* وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\angle BAC = \angle B\bar{\bar{A}}C \quad \dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$\angle BAC = \angle B\bar{\bar{\bar{A}}}C \quad \dots\dots\dots\dots\dots(3) \; .$$

i. e:

$$\angle\ B\bar{A}C\ =\ \angle\ B\bar{\bar{A}}C\ =\ \angle\ B\bar{\bar{\bar{A}}}C$$

وهو المطلوب إثباته

نتيجة (1)

* زاوية رأس المخروط المركز تساوى ضعف زاوية رأس المخروط المحيطي المشترك معه في القاعدة

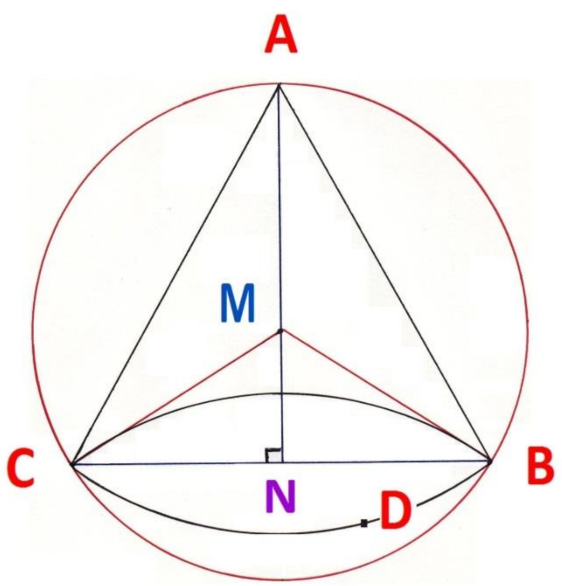


Fig (B)

* المعطيات :

ABDC مخروط محيطي قائم في الكرة M ، MBDC مخروط مركزي في نفس الكرة M ومشتركان في القاعدة .

* المطلوب :

إثبات أن زاوية رأس المخروط **MBDC** = ضعف زاوية رأس المخروط **ABDC** .

*** البرهان :**

كما نرى بالرسم Fig (B) :

∵ AN عمودي علي القاعدة المشتركة للمخروطين في N ، أيضاً MN عمودي علي نفس القاعدة .

∴ كل من المخروطين ABDC ، NBDC مشتركين في القاعدة والمحور .

لذلك يكون للمخروطين مستوى تماثل مشترك بينهما وهو عبارة عن دائرة نقسم الكرة إلي نصفين .

وتكون زاوية رأس المخروط المحيطي هي الزاوية BAC ،

زاوية رأس المخروط المركزي هي الزاوية BMC .

∵ الزاويتان يقعان في دائرة واحدة أحداهما مركزية والأخرى محيطية .

∴ زاوية رأس المخروط المركزي = ضعف زاوية رأس المخروط المحيطي .

وهو المطلوب إثباته

نتيجة (2)

* إذا اشترك مخروطان محيطيان في قاعدة واحدة وفي جهتان مختلفتان من بعضها فإن مجموع زاويتي رأسيهما = 180 درجة .

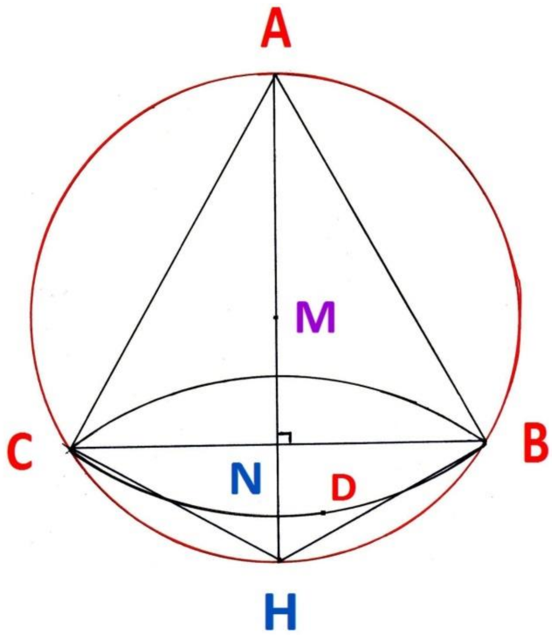


Fig (C)

* المعطيات :

ABDC و HBDC مخروطان محيطيان مشتركان في القاعة BDC

, BC وتر في القاعدة المشتركة وهما مشتركان في المحور AH

الذي هو قطر للكرة M .

* المطلوب :

إثبات أن زاوية رأس المخروط ABDC + زاوية رأس المخروط HBDC

= 180 درجة .

* البرهان :

كل من المخروطان **ABDC** و **HBDC** مشتركان في القاعدة **BDC**
كما أنهما مشتركان في المحور **AH** الذي هو قطر في الكرة **M** .

∴ يمر بالمخروطان مستوى تماثل واحد مشترك ويكون مستوى تماثل للكرة ويكون دائرة ويقسم الكرة إلي نصفين، فيكون **BC** وتر في الدائرة وكل من زاوية **BAC**، زاوية **BMC** وهم الزاويتان المثلان لرؤوس المخروطان عبارة عن زاويتان متقابلتان في شكل رباعي دائرى فيكون مجموعها **180** درجة .

وهو المطلوب إثباته .

نتيجة (3)

* زاوية رأس أي مخروط محيطي قاعدته دائرة ناشئة من تقاطع كرته مع مستوى تماثلها. أي أنه أي مخروط محيطي مرسوم في نصف كرة قاعدته دائرة نصف الكرة تكون زاوية رأسه = 90 درجة .

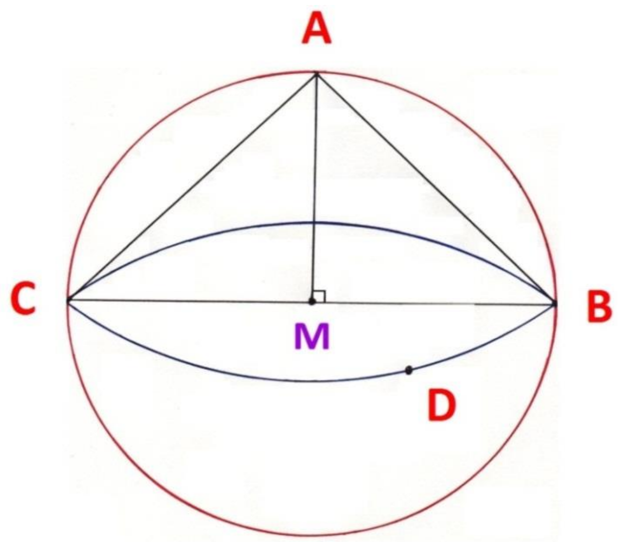


Fig (D)

الإثبات

∵ المخروط ABDC يقع في نصف الكرة .

∴ يمكن رسم مستوى تماثل للكرة يكون عمودياً علي القاعدة BDC ، وفي نفس الوقت يقع فيه المحور AM .

فبذلك الزاوية BAC زاوية رأس المخروط ABDC هي زاوية مرسومة فينصف الدائرة الناشئة من تقاطع الكرة مع مستوى التماثل، لهذا فتكون 90 درجة .

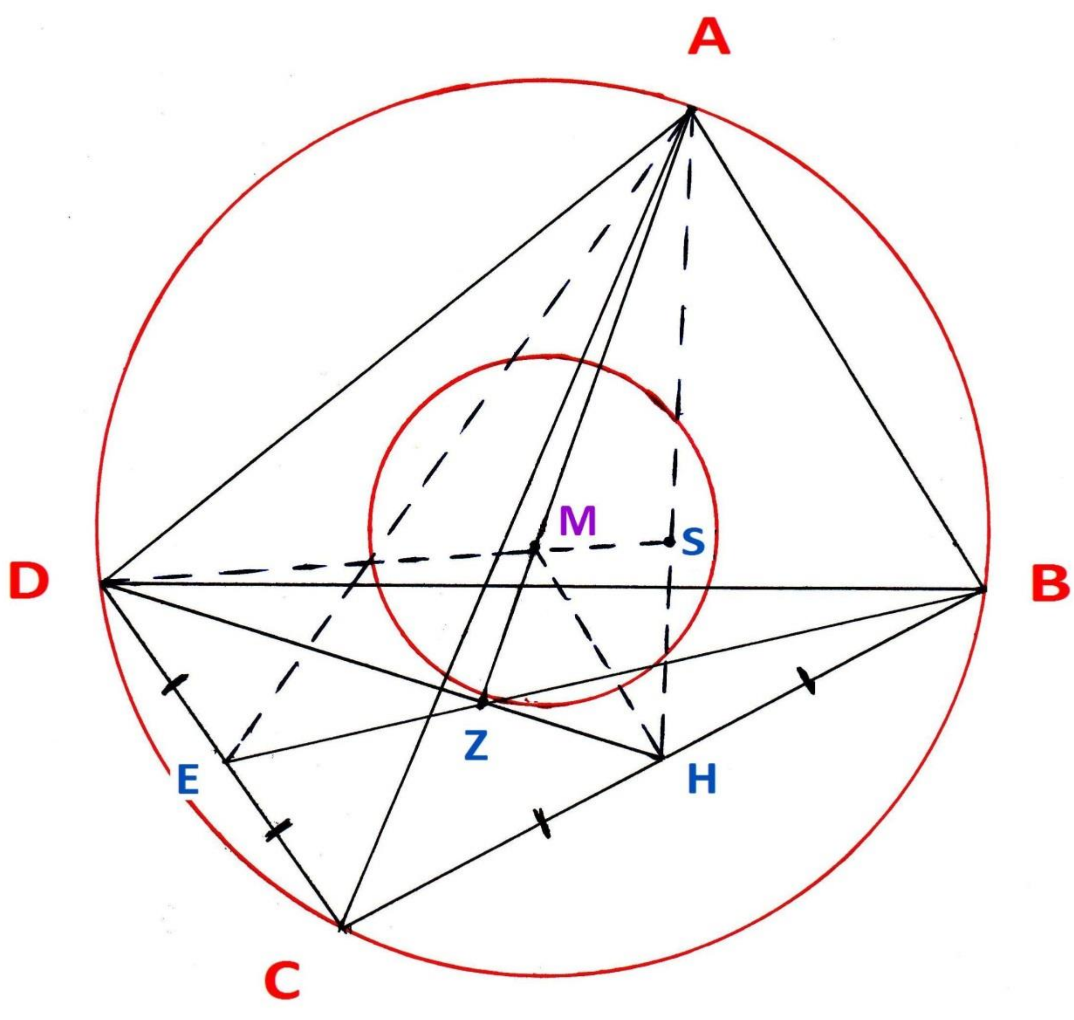
∴ زاوية رأس المخروط المحيطي المرسوم في نصف كره = 90 درجة .

وهو المطلوب

نظرية كور الهرم الثلاثي المنتظم

* (1) حجم الكرة الخارجية لهرم ثلاثي منتظم تساوى **27** ضعف حجم الكرة الداخلية له .

* (2) المساحة السطحية للكرة الخارجية لهرم ثلاثي منتظم = **9** أضعاف المساحة السطحية للكرة الداخلية له .



ملاحظات :

- جميع أوجه الهرم الثلاثي المنتظم مثلثات متساوية الأضلاع متطابقة .
- جميع ارتفاعات الهرم الثلاثي المنتظم متساوية .
- مستوى التماثل : هو مستوى يقسم الشكل الهندسي إلي نصفين متماثلين كل منهم صورة مرآه للآخر بحيث كل نقطة في أحد النصفين نجد ما يماثلها تماماً في النصف الآخر .

* المعطيات :

ABCD هرم ثلاثي منتظم كما هو واضح بالشكل مركزه **M** به كرة داخلية تمس أوجهه من الداخل وكرة خارجية بحيث تقع رؤوس الهرم علي محيط الكرة .

* المطلوب :

إثبات بند (1) و (2) في منطوق النظرية .

* العمل :

- نصل **B** بمنتصف **CD** في **E** .
- نصل **D** بمنتصف **CB** في **H** .
- نصل **A Z** حيث **Z** هي مركز القاعدة **BCD** فيكون **AZ** هو ارتفاع الهرم .
- نسقط $AH \perp DS$ ويلاقي **AH** في **S** .

* البرهان :

– نثبت أولاً أن جميع ارتفاعات الهرم الثلاثي المنتظم تتلاقي جميعاً في نقطة واحدة كالآتي :

– المستوى **AHD** يعتبر مستوى تماثل بالنسبة للهرم .

∴ مركز الهرم يقع في المستوى **AHD**

– بنفس الطريقة يمكن إثبات أن مركز الهرم يقع في المستوى **ABE** .

– ولكن كل من المستويان **AHD** و **ABE** يتقاطعان في المستقيم **AZ** وهو الارتفاع للهرم .

∴ مركز الهرم يقع علي الارتفاع **AZ** . بنفس الطريقة يمكن إثبات أن مركز الهرم يقع علي باقي ارتفاعات الهرم وهذا لا يحدث إلا إذا تقاطعت ارتفاعات الهرم الأربعة في نقطة واحدة هي مركز الهرم .

– نثبت ثانيا أن مركز الهرم يقطع أي ارتفاع للهرم بنسبة **3 : 1** من جهة الرأس .

* كما بالشكل نجد أن :

– كل من **AH** و **DH** متساويان ذلك لأنهم متوسطان متناظران لمثلثان متطابقان .

$$\mathbf{AE}\,\frac{1}{3} = \mathbf{HD}\,\frac{1}{3} = \mathbf{HZ} \quad *$$

* الشكل **MSHZ** به

$$\angle \mathbf{MSH} = \angle \mathbf{MZH} = \mathbf{90^{o}}$$

أي أن الشكل به زاويتان متقابلتان مجموعهما 180^0 .

$\therefore$ الشكل رباعي دائرى :

لكن $\angle AMS$ خارجة عن الشكل الرباعي الدائرى $MSHZ$.

$$\therefore \angle AMS = \angle SHZ .$$

- في المثلثان $\Delta\ AMS$, $\Delta\ AHZ$

$$\angle AMS = \angle SHZ \text{ و}$$

$$\angle SSM = \angle AZH = 90$$

$\therefore$ المثلثان متشابهان وينتج أن :

$$\frac{AM}{MS} = \frac{AH}{HZ} = \frac{DH}{HZ} = \frac{3}{1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

* في المثلثان $\Delta\ AMS$, $\Delta\ DMZ$ فيهما :

$$AS = DZ$$

$$, \ \angle AMS = \angle DMZ \qquad (\text{تقابل بالرأس})$$

$$, \ \angle MSA = \angle MZD \qquad (\text{زاويا قائمة})$$

$\therefore$ ينطبق المثلثان وينتج أن :

$$MS = MZ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ولكن من (1) في (2) يكون

$$\therefore \quad \frac{AM}{MZ} = \frac{3}{1}$$

أي أنه مركز الهرم يقسم الارتفاع AZ بنسبة $\frac{3}{1}$ من جهة الرأس A .

* بالمثل يمكن إثبات أن مركز الهرم يقسم باقي ارتفاعات الهرم بنفس النسبة $\frac{3}{1}$

* الآن نبرهن النظرية :

$\because$ $MS = MZ$ وأيضاً لباقي الارتفاعات .

$\therefore$ MS ونظائره هم أنصاف أقطار الكرة الداخلية للهرم ليكن كل منهم X .

، $\because$ $MA = MD =$ باقي نظائرهم في الارتفاعات .

$\therefore$ AM ونظائره هم أنصاف أقطار الكرة الخارجية للهرم فيكون كل منهم $3X$

$$\frac{\text{حجم الكرة الخارجية}}{\text{حجم الكرة الداخلية}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3X)^3}{\frac{4}{3}\pi X^3}$$

$$= 27$$

* أي أن حجم الكرة الخارجية لهرم ثلاثي منتظم $= 27$ ضعف حجم الكرة الداخلية له .

وهو المطلوب أولاً .

* أيضا :

$$\frac{\text{المساحة السطحية للكرة الخارجية}}{\text{المساحة السطحية للكرة الداخلية}} =$$

$$= \frac{4\pi\ (3X)^2}{4\pi X^2} = 9$$

أي أنه المساحة السطحية للكرة الخارجية لهرم ثلاثي منتظم = **9** أضعاف المساحة السطحية للكرة الداخلية له .

وهو المطلوب ثانياً

نظرية شكشك للمثلث

* في أي مثلث Δ إذا نصفت أضلاعه ووصلت نقاط التصنيف فإنـه ينشأ مثلث Δ_{-1} يشابه المثلث الأصلي Δ ويساوى ربعه .

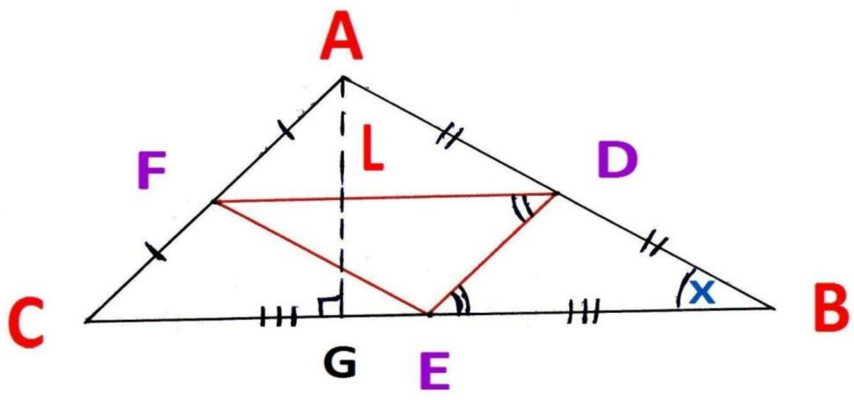


Fig (A)

* المعطيات :

Δ ABC نصف أضلاعه AB و BC و CA في D و E و F

علي الترتيب ، وصل DE و EF و FD فتكون المثلث DEF Δ .

* المطلوب :

إثبات أن المثلث DEF Δ يشابه المثلث ABC Δ ويساوى ربعه .

* العمل :

نسقط من A العمود AG علي BC ليلاقيه في G ويقطع DF في L

* البرهان :

FD واصل بين منتصفي الضلعين .

AB و AC في المثلث Δ ABC .

$\therefore$ BC // DF ويساوى نصفه .

بالمثل AC // DE ويساوى نصفه .

بالمثل AB // FE ويساوى نصفه .

تبادل $\angle$ DEB $=$ $\angle$ FDE $\therefore$

تناظر $\angle$ C $=$ $\angle$ BED و

$\therefore$ $\angle$ FDE $=$ $\angle$ C .... (1)

تناظر $\angle$ B $=$ $\angle$ FEC Also

تبادل $\angle$ DFE $=$ $\angle$ FEC but

$\therefore$ $\angle$ B $=$ $\angle$ DFE .... (2)

From (1) , (2) , we result that : $\angle$ BAC $=$ $\angle$ DEF

* في المثلثان Δ DFE , Δ ABC نجد أن :

$\angle$ BAC $=$ $\angle$ DEF ,

$\angle$ ABC $=$ $\angle$ EFD ,

$\angle$ ACB $=$ $\angle$ EDF .

$\therefore$ كل من المثلثان Δ DEF , Δ ABC متشابهان .

وهو المطلوب أولاً .

بالتبادل 90^o $=$ $\angle$ AGB $=$ $\angle$ ALD *

في المثلثان Δ AGB , Δ ALD فيهم :

$$\angle ALD = \angle AGB$$

بالتناظر $\angle ADL = \angle ABG$ و

مشتركة $\angle DAL$,

متشابهان $\Delta\ ABG$, $\Delta\ ADL$ $\therefore$

وينتج من التشابه أن :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AL}{AG} \Rightarrow \boxed{AL = \frac{1}{2}\ AG}$$

وقد أثبتنا سابقاً أن : $\boxed{DF = \frac{1}{2}\ BC}$

$$*\ \Delta\ ADF\ \text{area} = \frac{1}{2}\ DF.AL$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ BC\right) \times \frac{1}{2}\ (AG)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\ BC\right)(AG)$$

$$\therefore\ \Delta\ ADF = \frac{1}{4}\ \Delta\ ABC$$

ولكن الشكل ADEF فيه ED يوازي AF ويساويه

أي أن الشكل ADEF متوازي أضلاع

لكن DF قطر في الشكل ADEF

$\therefore$ يقسمه إلي مثلثين متطابقان

$$\therefore\ \Delta\ DEF = \Delta\ ADF$$

$$\therefore \ \Delta \ DEF = \frac{1}{4} \ \Delta \ ABC$$

وهو المطلوب ثانياً .

نتيجة

* إذا نصفت أضلاع أي مثلث Δ ثم وصلت نقاط التصنيف فإنه ينشأ مثلث Δ_{-1} مشابه للمثلث الأصلي Δ وتكون مساحته $= \frac{1}{4}$ مساحة المثلث الأصلي Δ ، ثم إذا نصفت أضلاع المثلث Δ_{-1} ووصلت نقاط التصنيف فإنه ينشأ مثلث Δ_{-2} مشابه لكل من Δ و Δ_{-1} وتكون مساحته $= \frac{1}{4} \Delta_{-1}$ وهكذا إلي Δ_{-N} ، والعكس صحيح فإن المثلث Δ ناشئ من تصنيف أضلاع Δ_{1} الذي مساحته $= 4$ أضعاف Δ وهكذا إلي Δ_{N} وبذلك يتكون خط شكشك للمثلثات المتناشئة.

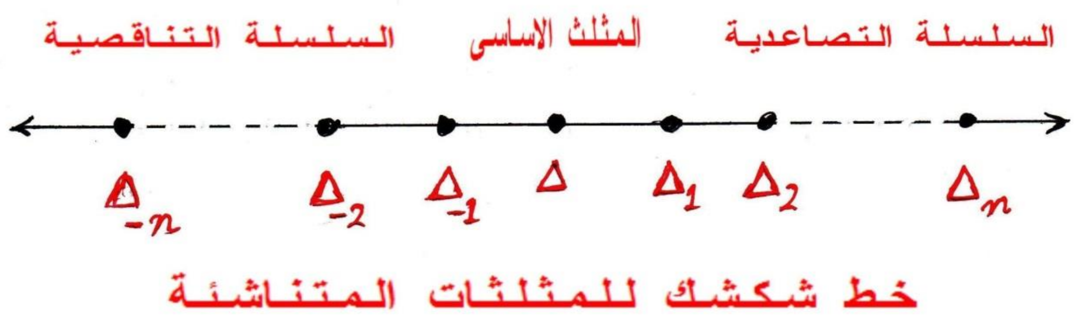


Fig (B)

وتكون المثلثات Δ_{N} و.... و Δ_{2} و Δ_{1} و Δ و Δ_{-1} و Δ_{-2} و ... و Δ_{-N} .

جميعها متشابهة وأن مساحة أي مثلث في سلسلة المثلثات الكبرى يساوى $\frac{1}{4}$

مساحة المثلث الذي يليه، وأيضاً مساحة أي مثلث في سلسلة المثلثات الصغرى

يساوى **٤** أضعاف مساحة لمثلث الذي يليه، وعلي ذلك يكون :

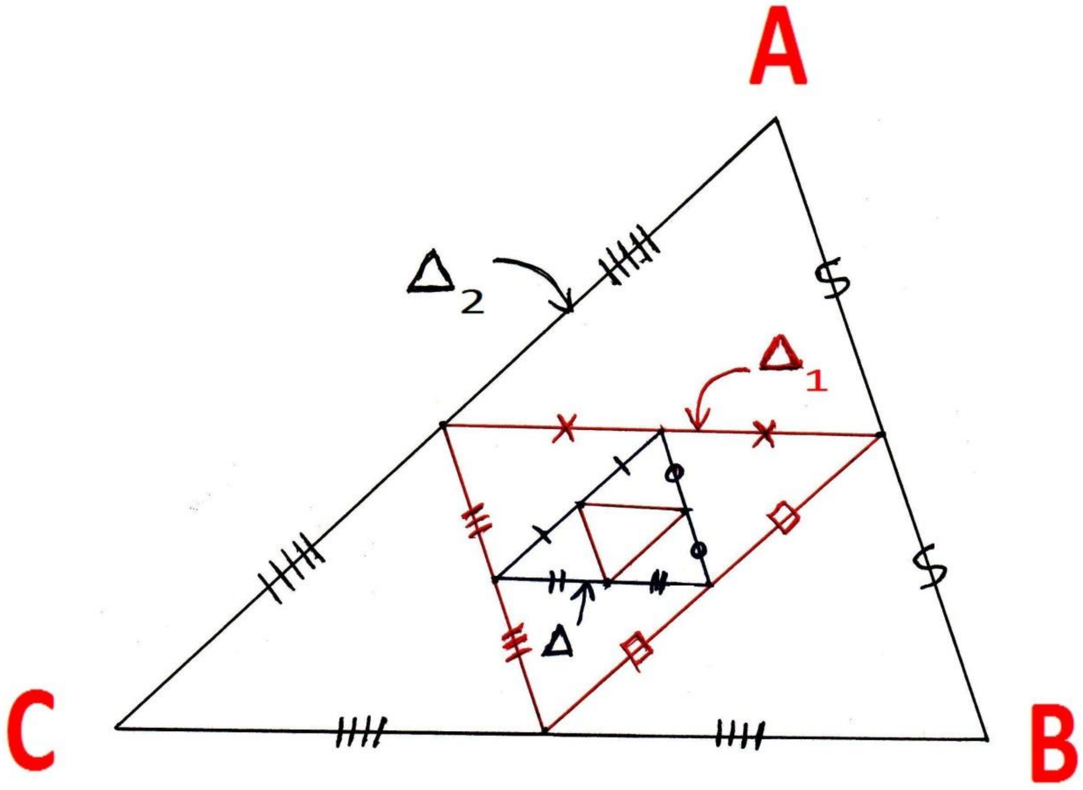


Fig (C)

$$\Delta_N \text{ area} = 4^N \Delta \quad ,$$

$$\Delta_{-N} \text{ area} = \left(\frac{1}{4}\right)^N \Delta$$

وهو المطلوب إثباته

نظرية الأهرامات المتناشئة

* إذا وصلت مراكز هرم ثلاثي منتظم P طول حرفه L فيما بينهم، فإنه ينشأ هرم ثلاثي منتظم أصغر منه هو P_{-1} طول حرفه L_{-1} ، وإذا حدث نفس الشئ مع الهرم P_{-1} فإنه ينشأ هرم P_{-2} طول حرفه L_{-2} وهكذا إلي الهرم P_{-N} طول حرفه L_{-N} وبذلك تنشأ سلسلة الأهرامات الصغرى وبالعكس فإن الهرم P هو ناشئ من توصيل مركز هرم ثلاثي منتظم أكبر منه هو P_1 الذي طول ضلعه L_1 وهكذا P_2 الذي طول ضلعه L_2 وهكذا إلي P_N الذي طول ضلعه L_N وبذلك تنشأ سلسلة الأهرامات الكبرى .

فإذا اعتبرنا الهرم P هو الهرم الأساسي يكون :

$$L_N = 3^N L \quad \text{و} \quad L_{-N} = \left(\frac{1}{3}\right)^N L$$

حيث :

- L هو حرف الهرم الأساسي P .
- L_N هو حرف الهرم P_N .
- L_{-N} هو حرف الهرم P_{-N} .
- N هي رقم الهرم في سلسلة الأهرامات الكبرى ابتداءً من الهرم P_1 .
- $-N$ هي رقم الهرم في سلسلة الأهرامات الصغرى ابتداءً من الهرم P_{-1} .

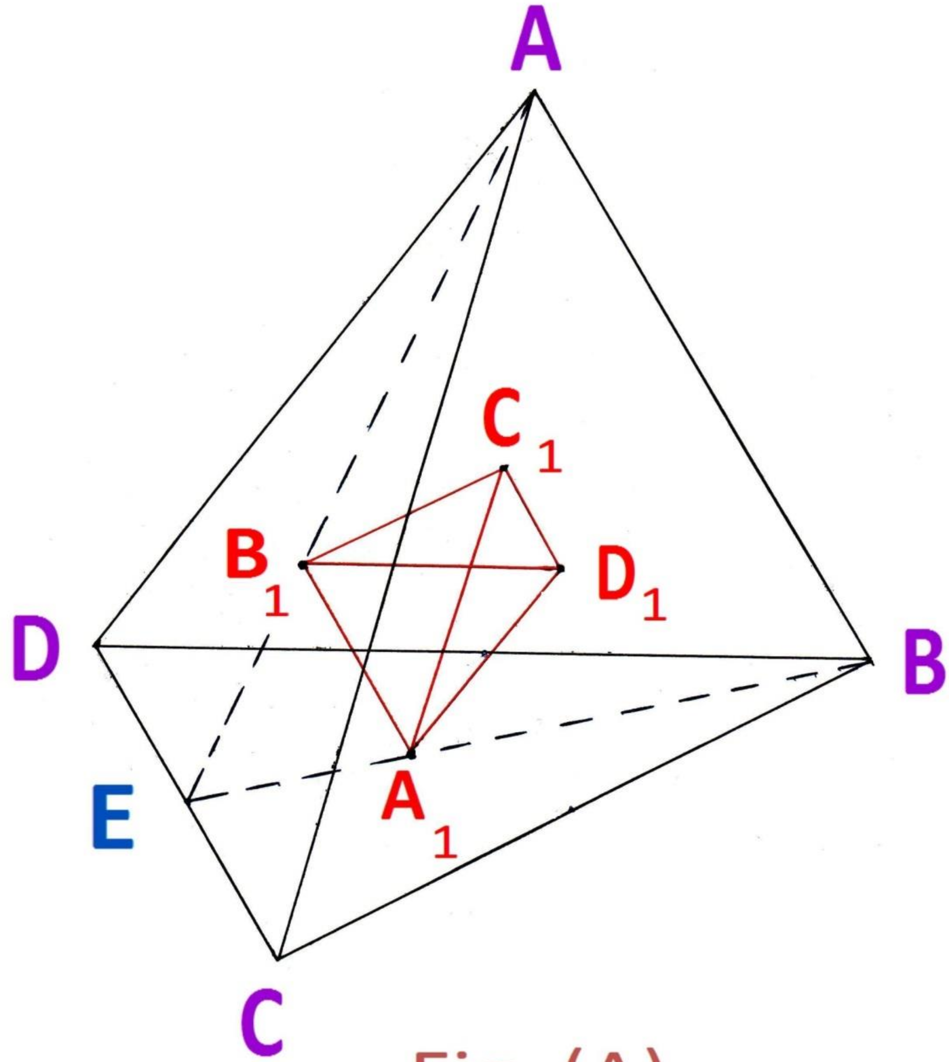
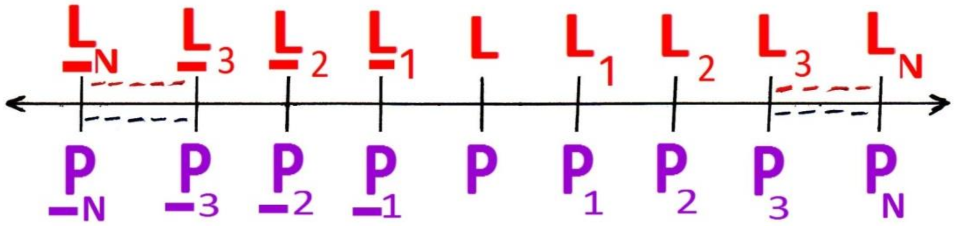


Fig (A)



خط شكشك للاهرامات المتناشئة

Fig (B)

* تمهيد:

كما في Fig (A) فإذا وصلنا نقاط مراكز أوجه الهرم ABCD وهو الهرم P الذي طول حرفه L ، فإنه ينشأ هرم ثلاثي منتظم P_{-1} وطول حرفه L_{-1} وهو أصغر من الهرم الأساسي . وإذا حدث نفس الشئ للهرم P_{-1} سينشأ هرم أصغر هو P_{-2} طول حرفه L_{-2} وهكذا إلي الهرم P_{-N} الذي طول حرفه L_{-N} .

والعكس فإن الهرم P الأساسي ناشئ من توصيل مراكز أوجه هرم أكبر منه هو الهرم P_1 الذي طول حرفه L_1 ثم P_2 الذي طول حرفه P_2 وهكذا إلي أن نصل إلي الهرم P_N وطول حرفه L_N وبذلك كما في Fig (B) تتكون سلسلة الأهرامات الكبرى والصغرى كما هو واضح في **خط شكشك للأهرامات المتناشئة** .

ومن هنا يتضح أنه يمكننا إيجاد طول حرف أي هرم في سلسلة الأهرامات الكبرى أو الصغرى وذلك إذا عُلم طول حرفه الهرم الأساسي L ورقم الهرم في

السلسلة الكبرى أو الصغرى الراد إيجاد طول حرفه وذلك بالتطبيق في القانون الموجود في النظرية .

*** المعطيات :**

في Fig (A) ، ABCD هرم ثلاثي منتظم طول حرفة L .

D_1 و C_2 و B_1 و A_1 هم مراكز أوجه الهرم الأربعة ، وصلت المراكز فيها بينها فتكون الهرم $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ الذى طول حرفة $L\text{-}1$ وبفرض أن السابق قد حدث علي الهرم $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ فسيتكون الهرم $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$ الذى طول حرفة $L\text{-}2$ وهكذا تتكون سلسلة الأهرامات الصغرى كما هو واضع في Fig (B) ثم نكون سلسلة الأهرامات الكبرى كما هو واضح أيضاً في Fig (B) .

*** المطلوب :**

أثبات أن :

$$\boxed{L_N = 3^N\, L \quad \text{و} \quad L_{-N} = \left(\frac{1}{3}\right)^N L}$$

*** العمل :**

– ننصف CD في E ثم نصل كل من AE و BE .

*** البرهان :**

– ∵ AE متوسط في الوجه ACD

∴ B_1 تقع علي AE وتقسمه بنسبة $1:2$ من جهة الرأس A

.

– وبالمثل في الوجه BCD ، A_1 تقع علي BE وتقسمه بنسبة $1:2$ من جهة الرأس B .

– في المثلث $\Delta\, AEB$ نجد أن :

$$\frac{EB_1}{EA} = \frac{EA_1}{EB} = 1/3$$

$$\therefore \quad B_1A_1 \;//\; AB$$

$\therefore \quad \Delta\, EB_1A_1 \;,\; \Delta\, EAB$ متشابهان

$$\therefore \quad \frac{B_1\,A_1}{AB} = \frac{EB_1}{EA} = 1/3$$

$$\therefore \quad B_1A_1 = \frac{1}{3}\, L$$

أي أنه طول حرف الهرم الناشئ $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ يساوى $\frac{1}{3}$ حرف الهرم الأساسي $A\ B\ C\ D$.

- بالمثل :

$$L_{-2} = \frac{1}{3}\, L_{-1}$$

$$\therefore \quad \boxed{L_{-N} = \left(\frac{1}{3}\right)^{N} L}$$

وهو المطلوب أولاً .

أي أنه طور حرف أ ي هرم = ٣ أضعاف طول حرف الهرم الأقل منه مباشرتاً

نستنتج من ذلك أن :

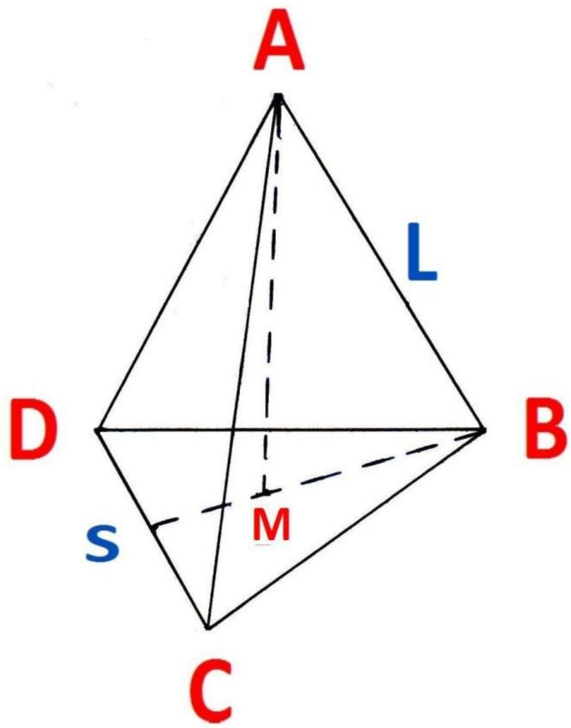
$$L_1 = 3L \quad \text{و} \quad L_2 = 3L_1$$

$$\therefore \quad \boxed{L_N = (3)^N L}$$

وهو المطلوب ثانياً .

نظرية حجم الهرم الثلاثي المنتظم

- حجم الهرم الثلاثي المنتظم $= \frac{L^3}{6\sqrt{2}}$ حيث L هو طول حرف الهرم .



* المعطيات :

ABCD هرم ثلاثي منتظم طول حرفه L .

* المطلوب :

إثبات أن حجم الهرم $= \frac{L^3}{6\sqrt{2}}$

* العمل :

- نرسم المتوسط BS فيلاقي CD في S .

- نسقط العمود AM ليلاقي BS في M .

* البرهان :

حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ القاعدة $\times$ الارتفاع .

$$* \quad BS = \frac{\sqrt{3}}{2} L \quad (\text{إرتفاع مثلث قاعدة الهرم})$$

$$* \quad BM = \frac{2}{3} BS = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} L$$

$$* \quad (AM)^2 = (AB)^2 - (BM)^2 = L^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} L\right)^2 =$$

$$= L^2 - \frac{1}{3} L^2 = \frac{2}{3} L^2$$

$$\therefore \quad AM = \sqrt{\frac{2}{3}} L \quad (\text{إرتفاع الهرم})$$

$\therefore$ حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ القاعدة $\times$ الارتفاع $=$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{L}{2} \times \frac{\sqrt{3} L}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2} L}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times L^3}{2 \times 6 \times \sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{2}} L^3$$

وهو المطلوب .

نتيجة

* إذا تساوى طول حرف كل من مكعب وهرم ثلاثي منتظم فإن :

حجم المكعب $= 6\sqrt{2}$ حجم الهرم

* الإثبات :

$$\frac{\text{حجم المكعب}}{\text{حجم الهرم}} =$$

$$= \frac{L^3}{1} \div \frac{L^3}{6\sqrt{2}} = \frac{L^3}{1} \times \frac{6\sqrt{2}}{L^3} =$$

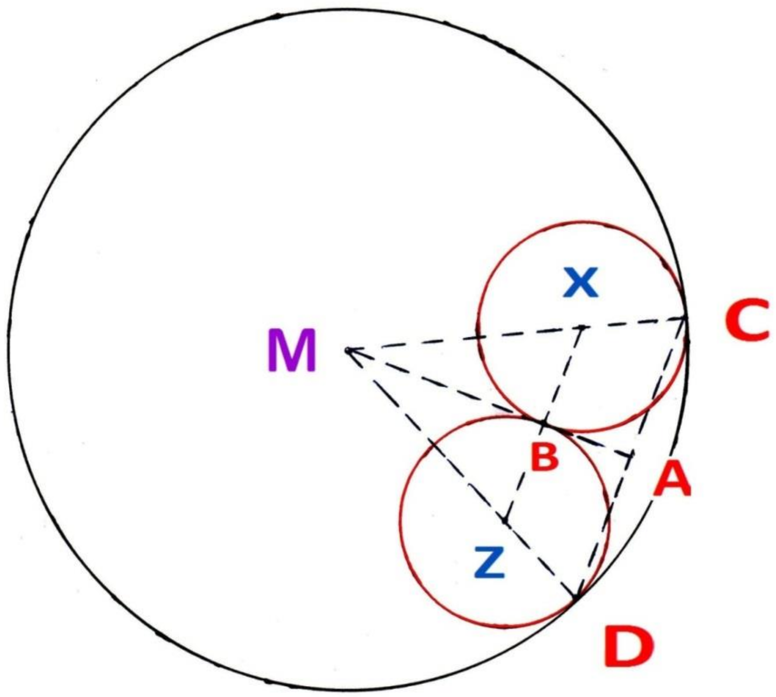
$$= 6\sqrt{2}$$

وهو المطلوب .

نظرية الدوائر المتماسة الداخلية

* إذا مست دائرة نصف قطرها **R** من الداخل عدد **n** من الدوائر المتطابقة والمتماسين مثنى مثنى من الخارج بحيث لا يوجد فواصل بين أي دائرة والتي تليها وكان نصف قطر أي منهم هو **r** فإن :

$$\boxed{r = \frac{R}{\operatorname{cosec}\dfrac{180}{n} + 1}}$$



* المعطيات :

– **M** دائرة يمسها من الداخل عدد **n** من الدوائر المتطابقة والمتماسة مثنى مثنى من الخارج بحيث لا يوجد فواصل بين أي دائرة والتي تليها وكان نصف قطر أي منهم هو **r** .

* الدائرتان Y و X متماستان من الخارج فيما بينهما في B ويمسان الدائرة M من الداخل في D و C علي الترتيب . مع العلم أن نصف قطر الدائرة M هو R وأن نصف قطر أي من الدوائر المتماسة مثنى مثنى هو r .

* المطلوب :

إثبات أن $$\boxed{r = \frac{R}{\operatorname{cosec}\frac{180}{n} + 1}}$$

* العمل :

- نصل M بكل من D و C .
- نصل XZ .
- نصل MB ونمده على استقامته ليلاقي CD في A .

* البرهان : بالنظر للشكل نجد أن :

$$MC = MD \quad \text{but} \quad XC = ZD$$

$$\therefore MX = MZ$$

$\therefore \ \Delta\ MXZ$ متساوى الساقين

$\text{but} \quad BX = BZ$ (أنصاف أقطار في دوائر متطابقة)

$\because$ XZ واصل بين مركزي دائرتين متماستين في B .

$\therefore$ كل من النقاط Z و B و X تقع جميعاً على استقامة واحدة ونستنتج من ذلك أيضاً أن النقطة B تقع في منتصف XZ .

$$\therefore \quad MB \perp XZ \; .$$

* بالنظر للشكل نجد أن نقاط التماس بين كل دائرتين من الدوائر المتطابقة المتماسة تقع علي المستقيم الواصل بين مركزي الدائرتين وفي منتصفه

∴ المسافات بين مركزي كل دائرتين متتاليتين متماستين تكون متساوية .

∴ مراكز جميع الدوائر المتماسة مثنى مثنى نشكل مضلع هندسي متساوى الأضلاع .

- كما نجد أن المثلث $\Delta\ MXZ$ متساوى الساقين

$$\therefore \angle MXZ = \angle MZX$$

أي أن أنصاف زوايا رؤوس المضلع المتكون تكون متساوية، بذلك تكون الزاويا الداخلية للمضلع المتكون متساوية وبناءً عليه يكون المضلع المتكون من توصيل مراكز الدوائر المتماسة مثنى مثنى هو هو مضلع هندسي منتظم عدد أضلاعه n

$$\therefore \angle XMZ = \frac{360}{n} \quad \Longrightarrow \quad \angle BMX = \frac{180}{n}$$

* في المثلث $\Delta\ BMX$ نجد أنه قائم الزاوية في B .

$$\therefore \quad BX = MX \sin \frac{180}{n}$$

$$\therefore \quad r = (R - r) \sin \frac{180}{n}$$

$$\therefore \quad r = R \sin \frac{180}{n} - r \sin \frac{180}{n}$$

$$\therefore \quad r + r \sin \frac{180}{n} = R \sin \frac{180}{n}$$

$$\therefore\ r\ \left(1+\sin\frac{180}{n}\right) = R\sin\frac{180}{n}$$

$$\therefore\ r = \frac{R\ \sin\frac{180}{n}}{1+\sin\frac{180}{n}}$$

بقسمة البسط والمقام للطرف الأيسر للمعادلة على $\left(\sin\frac{180}{n}\right)$ يكون :

$$\therefore\ r = \frac{R}{1+\frac{1}{\sin\frac{180}{n}}} = \frac{R}{1+\operatorname{cosec}\frac{180}{n}}$$

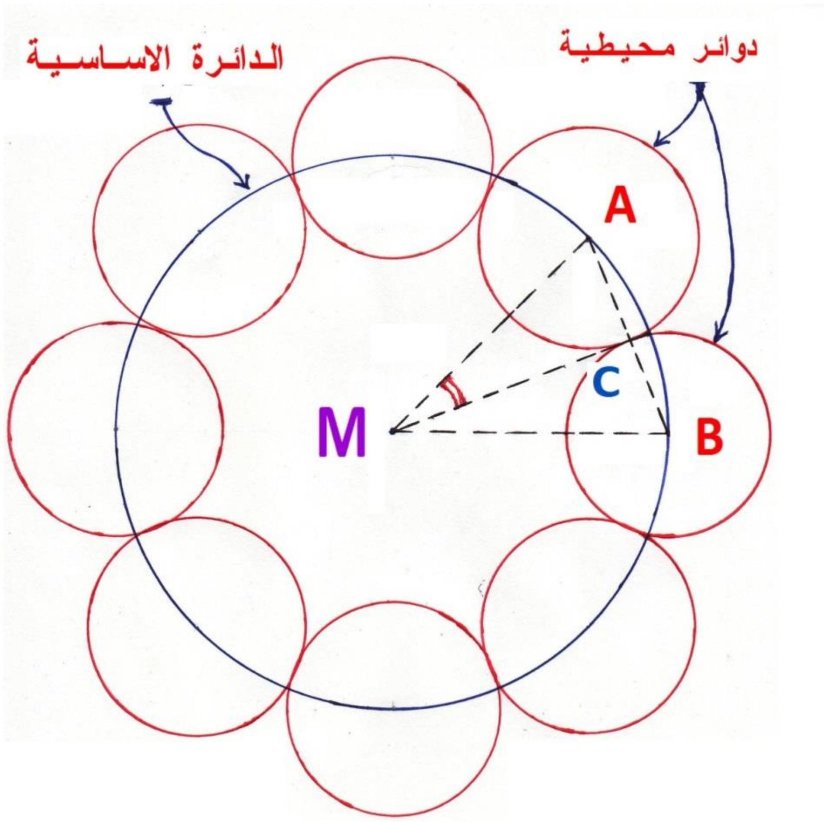
$$\therefore\ \boxed{r = \frac{R}{\operatorname{cosec}\frac{180}{n}+1}}$$

وهو المطلوب إثباته

نظرية الدوائر المتماسة المحيطية

* إذا وقعت مراكز عدد **n** من الدوائر المتطابقة والمتماسة فيما بينهم مثنى مثنى علي محيط دائرة نصف قطرها **R** وكان نصف قطر أي من الدوائر المتطابقة هو **r** بحيث لا يوجد فاصل بين أي دائرة والتي تليها فإن :

$$\boxed{r = R \sin \frac{180}{n}}$$



* المعطيات :

M دائرة نصف قطرها **R** مرسوم علي محيطها عدد **n** من الدوائر المتطابقة والمتماسة مثنى مثنى و نصف قطر كل منهم هو **r** بحيث تقع مراكزهم جميعاً علي محيط الدائرة **M** .

*** المطلوب :**

إثبات أن $\boxed{r = R \sin \frac{180}{n}}$

*** العمل :**

– نصل مركز الدائرة **M** بكل من مركزي دائرتين متتاليتين وليكن المركزين **B** و **A** .

– نصل المركز **M** بنقطة تماس الدائرتين **B** و **A** وهي النقطة **C** .

*** البرهان :** الدائرتين **B** و **A** متطابقتين ومتماسين من الخارج في النقطة **C**

∴ النقطة **C** تقع علي القطعة المستقيمة **AB** وتنصفها .

$$i.e \quad AB = 2r$$

∴ المضلع الهندسى الناشئ من توصيل مراكز الدوائر المتماسة مثنى مثنى هو مضلع هندسي منتظم طول ضلعه **2r** وعدد أضلاعه **n**

$$\therefore \quad \angle AMB = \frac{360}{n}$$

ولكن المثلث **Δ MAB** متساوى الساقين في **MB** و **MA** .

، ∵ MC واصل من رأس المثلث MAB إلي منتصف القاعدة

$$\therefore \ \angle AMC = \angle BMC = \frac{180}{n}$$

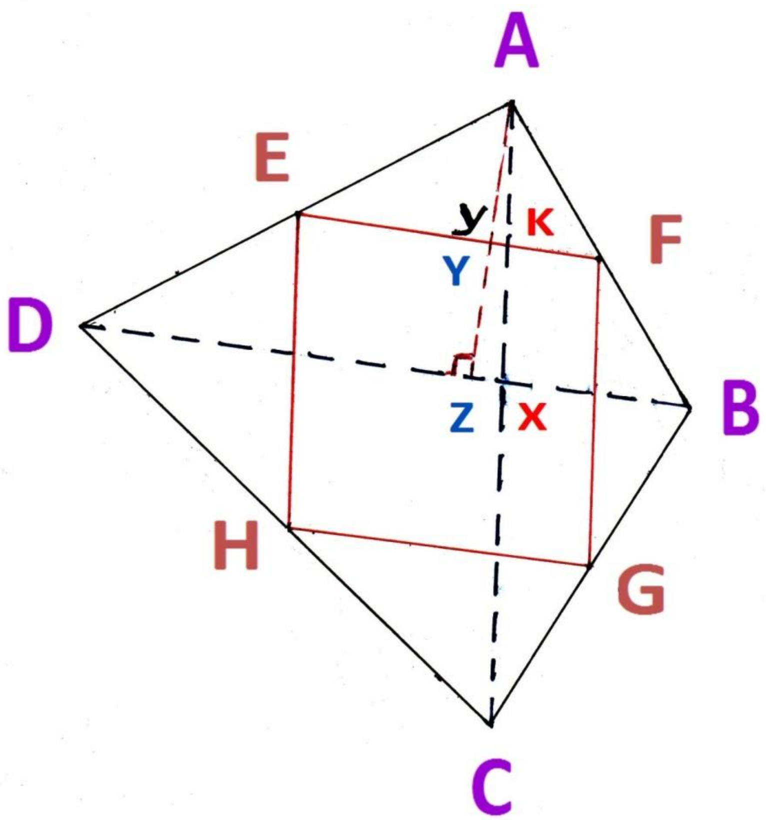
∴ المثلث Δ AMC قائم الزاوية في C .

$$\therefore AC = AM \ \sin\angle AMC$$

$$\therefore \ \boxed{r = R \sin \frac{180}{n}}$$ وهو المطلوب

نظرية الشكل الرباعي

* في أي شكل رباعي إذا نصفت أضلاعه الأربعة ووصلت نقاط التنصيف فيما بينهم فسينتج متوازي أضلاع مساحته تساوى نصف مساحة الشكل الرباعي .



* المعطيات :

ABCD شكل رباعي نصفت أضلاعه AB , BC , CD , DA في F , G , H . E علي الترتيب وصلت E , F , G , H فتكون الشكل F G H E

* المطلوب :

١ – إثبات أن الشكل EFGH متوازي أضلاع .

٢ – إثبات أن مساحة الشكل EFGH $= \frac{1}{2}$ مساحة الشكل الرباعي ABCD .

* العمل :

– نصل AC فيقطع EF في K .

– نصل BD .

– نسقط العمود AZ ⊥ BD في النقطة Z ويقطع EF في Y .

* البرهان :

– في المثلث ABD Δ يكون EF واصل بين منتصفي الضلعين AB , AD .

∴ DB // EF ويساوى نصفه .... (1)

– في المثلث CBD Δ يكون HG واصل بين منتصفي الضلعين CB , CD

$\therefore$ $BD \,//\, GH$ ويساوى نصفه .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $HG \,//\, EF$ ويساويه

$\therefore$ الشكل $EFGH$ يكون متوازي أضلاع

وهو المطلوب أولاً .

– $DB \perp AZ$ ولكن $HF \,//\, DB$.

$\therefore$ $EF \perp ZA$ في النقطة Y .

أي أن AZ عبارة عن ارتفاع للمثلث $\Delta\ ADB$.

، AY عبارة عن ارتفاع للمثلث $\Delta\ AEF$

– المثلثان $\Delta\ ABZ$, $\Delta\ AFY$ متشابهان .

$$\therefore \quad \frac{AF}{AB} = \frac{AY}{AZ} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad AY = \frac{1}{2}\ AZ$$

* نفرض أن $L = BD$

$$\therefore \quad EF = \frac{1}{2}\ L$$

* نفرض أن $M = AZ$

$$\therefore \quad AY = \frac{1}{2}\ M$$

$$*\quad \Delta\, AFE\ \ area = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\, L \times \frac{1}{2}\, M =$$

$$= \frac{1}{8}\ LM \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (1)$$

$$,\quad \Delta\, ABD\ \ area\ = \frac{1}{2}\ L\,M \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\Delta\, AFE\ = \frac{1}{4}\ \Delta\ ABD \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (4)$$

أيضا يمكن إثبات أن :

$$\Delta\, BFG\ \ area\ = \frac{1}{4}\ \Delta\, BAC \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (5)$$

$$,\quad \Delta\, CGH\ \ area\ = \frac{1}{4}\ \Delta\, CBD \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (6)$$

$$,\quad \Delta\, DEH\ \ area\ = \frac{1}{4}\ \Delta\, DAC \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (7)$$

- من (4) و (5) و (6) و (7) نستنتج أن :

$$(\Delta\, AEF + \Delta\, BFG + \Delta\, CGH +$$

$$\Delta DHE) = \frac{1}{4}\ (\Delta\, ADB + \Delta\, ABC +$$

$$\Delta\, CBD + \Delta\, DAC) =$$

$$= \frac{1}{2}\ (ABCD)\ \ area$$

$$\therefore\ (EFGH)\ area\ = \frac{1}{2}\ (ABCD)\ area$$

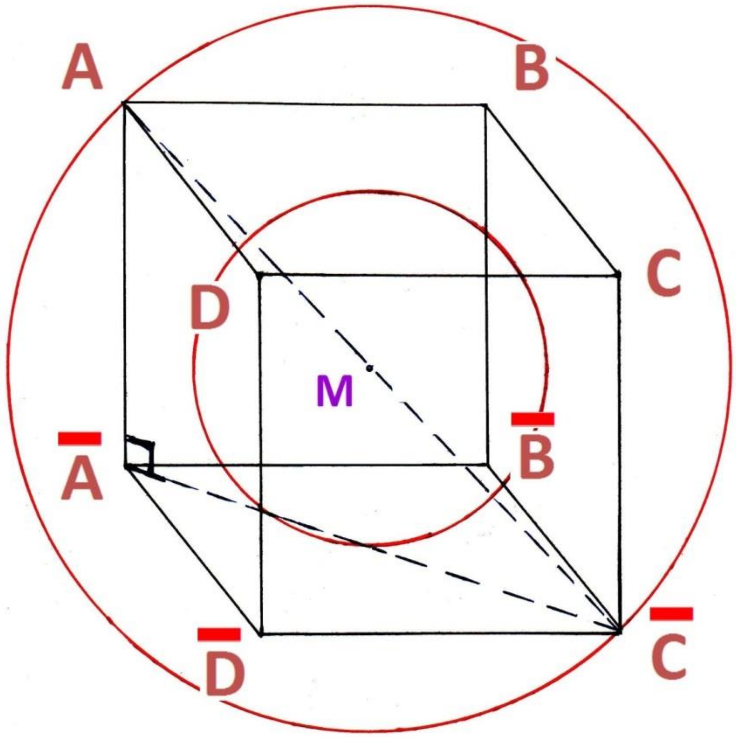
أي أن مساحة متوازي الأضلاع **EFGH** تساوي نصف مساحة الشكل **ABCD** .

وهو المطلوب ثانياً .

نظرية كور المكعب

* في أي مكعب نسبة حجم الكره الخارجية إلي حجم الكرة الداخلية $= 3\sqrt{3}$ قيمة ثابتة .

أيضا نسبة المساحة السطحية للكره الخارجية = ثلاث أضعاف المساحة السطحية للكره الداخلية .



* المعطيات :

$A\,B\,C\,D\,\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ مكعب مركزه M وطول حرفه L .

* المطلوب : إثبات أن :

$$\frac{\text{حجم الكرة الخارجية للمكعب}}{\text{حجم الكرة الداخلية للمكعب}} = 3\sqrt{3}$$

المساحة السطحية للكرة الخارجية = **ثلاث أضعاف** المساحة السطحية للكرة الداخلية للمكعب .

* **العمل :**

- نرسم القطر $A\bar{C}$.

* **البرهان :**

- المكعب له ٤ أقطار متساوية متقاطعة في النقطة M وينصف كل منهم الآخر.

- لذلك AM هو نصف قطر الكرة الخارجية .

- كما أن نصف قطر الكرة الداخلية $= \frac{1}{2}\,L$

- في المثلث $\Delta\ \bar{B}\bar{C}\bar{A}$ يكون :

$$(\bar{A}\bar{C})^2 = 2\,L^2$$

وفي المثلث $\Delta\ A\bar{C}\bar{A}$ يكون :

$$(A\bar{C})^2 = (\bar{A}\bar{C})^2 + (A\bar{A})^2 =$$

$$= 2L^2 + L^2 = 3L^2$$

* بفرض أن نصف قطر الكرة الخارجية R .

وبفرض أن نصف قطر الكرة الداخلية r .

$$\therefore\ R = \frac{\sqrt{3L^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,L$$

$$\therefore\ \frac{\text{حجم الكرة الخارجية}}{\text{حجم الكرة الداخلية}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,L\right)^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}L\right)^3} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}\,L}{2}\right)^3 \div \left(\frac{L}{2}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}\,L}{2} \times \frac{2}{L}\right)^3 = 3\sqrt{3}$$

وهو المطلوب أولاً.

$$\frac{\text{المساحة السطحية للكرة الخارجية}}{\text{المساحة السطحية للكرة الداخلية}} = \frac{4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,L\right)^2}{4\pi\left(\frac{1}{2}\,L\right)^2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}\,L}{2}\right)^2 \div \left(\frac{L}{2}\right)^2 =$$

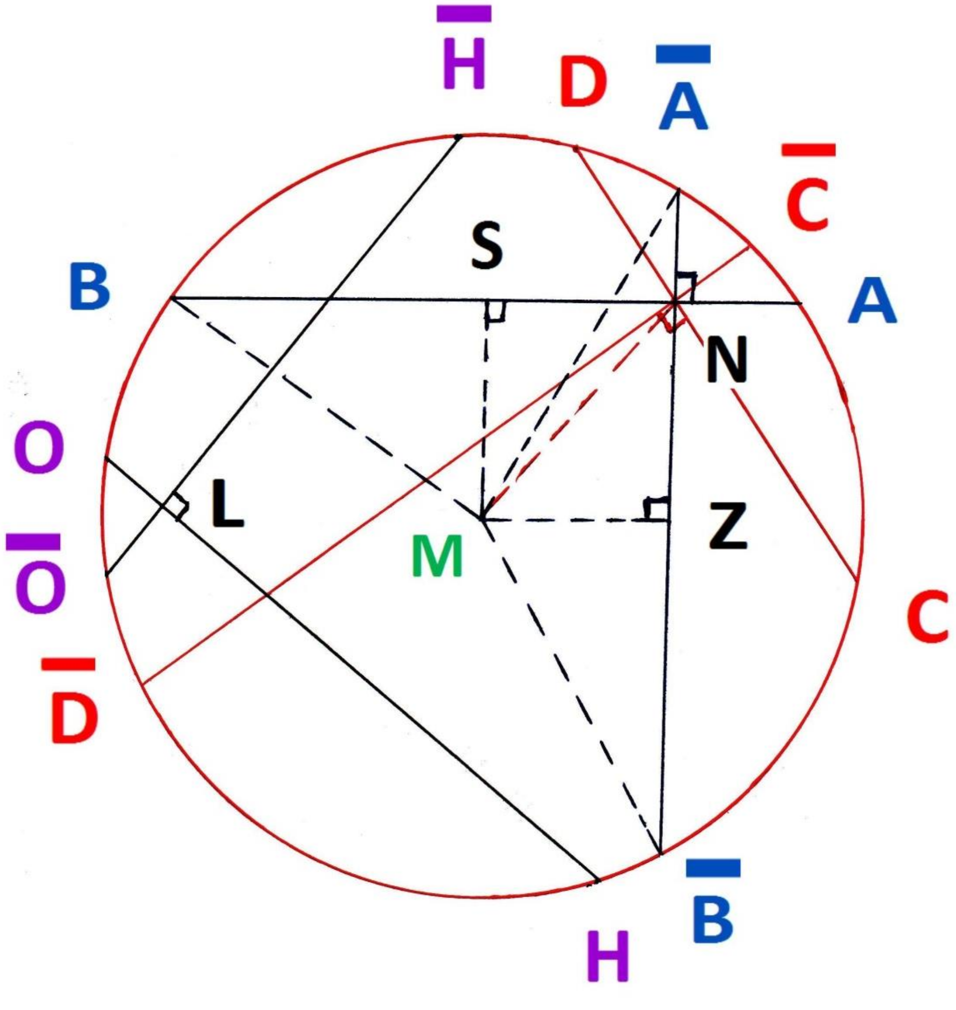
$$= \left(\frac{\sqrt{3}\,L}{2} \times \frac{2}{L}\right)^2 = 3$$

وهو المطلوب ثانياً .

نظرية الأوتار المتعامدة

- في أي دائرة قطرها **d** يكون مجموع مربعات أي وترين متعامدين في نقطة علي بعد ثابت **X** من مركز الدائرة =

$$2\left(d^2 - 2X^2\right) = \text{قيمة ثابتة}$$



* المعطيات :

N و **L** نقطتان تبعدان مسافتان متساويتان قدرها **X** من مركز لدائرة **M** التي لها قطر يساوى **d** ونصف قطرها هو **R** ، **AB** , $\bar{A}\bar{B}$ وتران

متعامدان في النقطة N ، أيضاً CD , $\overline{CD}$ وتران متعامدان في نفس النقطة N ، OH , $\overline{OH}$ وتران متعامدان في النقطة L التي لها نفس بعد النقطة N عن المركز للدائرة .

* **المطلوب :** أثبات أن :

$$(AB)^2 + (\overline{AB})^2 = (CD)^2 + (\overline{CD})^2 =$$

$$= (OH)^2 + (\overline{OH})^2 = 2\,(d^2 - 2X^2) = \text{قيمة ثابتة}$$

* **العمل :**

– نصل النقطة M بكل من النقاط A , B , $\bar{A}$, $\bar{B}$, N .

– نسقط العمودان $AB \perp MS$, $\overline{AB} \perp MZ$

* **البرهان :** المثلث $\Delta\, MSB$ قائم الزاوية في S .

$$\therefore \quad (BS)^2 = (MB)^2 - (MS)^2$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = R^2 - (MS)^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \; (1)$$

بالمثل المثلث $\Delta\, MZ\bar{B}$ يكون :

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}\,\overline{AB}\right)^2 = R^2 - (MZ)^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \; (2)$$

بجمع (1) ، (2) يكون :

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}\,AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,\overline{AB}\right)^2 = 2R^2 -$$

$$[\,(MS)^2 + (MZ)^2\,] \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \; (3)$$

لكن في الشكل NSMZ نجد أن :

$$\angle SNZ = \angle NSM = \angle NZM = 90^{o}$$

∴ الشكل MSNZ مستطيل .

$$\therefore \quad MZ = SN$$

$$\therefore \quad (MS)^2 + (MZ)^2 = (MN)^2 = X^2$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2 = 2R^2 - X^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$\left(\frac{1}{2}CD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{CD}\right)^2 = 2R^2 - X^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$, \quad \left(\frac{1}{2}OH\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{OH}\right)^2 = 2R^2 - X^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

* من (4) و (5) و (6) يتضح لنا أن :

$$\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{CD}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}OH\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{OH}\right)^2 = 2R^2 - X^2$$

بضرب أطراف المعادلة الأربعة في 4

$$\therefore (AB)^2 + (\overline{AB})^2 = (CD)^2 + (\overline{CD})^2$$

$$= (OH)^2 + (\overline{OH})^2 = 8R^2 - 4X^2 =$$

$$= 2\,(4R^2 - 2X^2) = 2\,(d^2 - 2X^2)$$

أي أنه مجموع مربعي أي وترين متعامدين علي بعض ثابت من مركز دائرة

$$= \text{قيمة ثابتة} = 2\left(d^2 - 2X^2\right)$$

وهو المطلوب أثباته

نتيجة

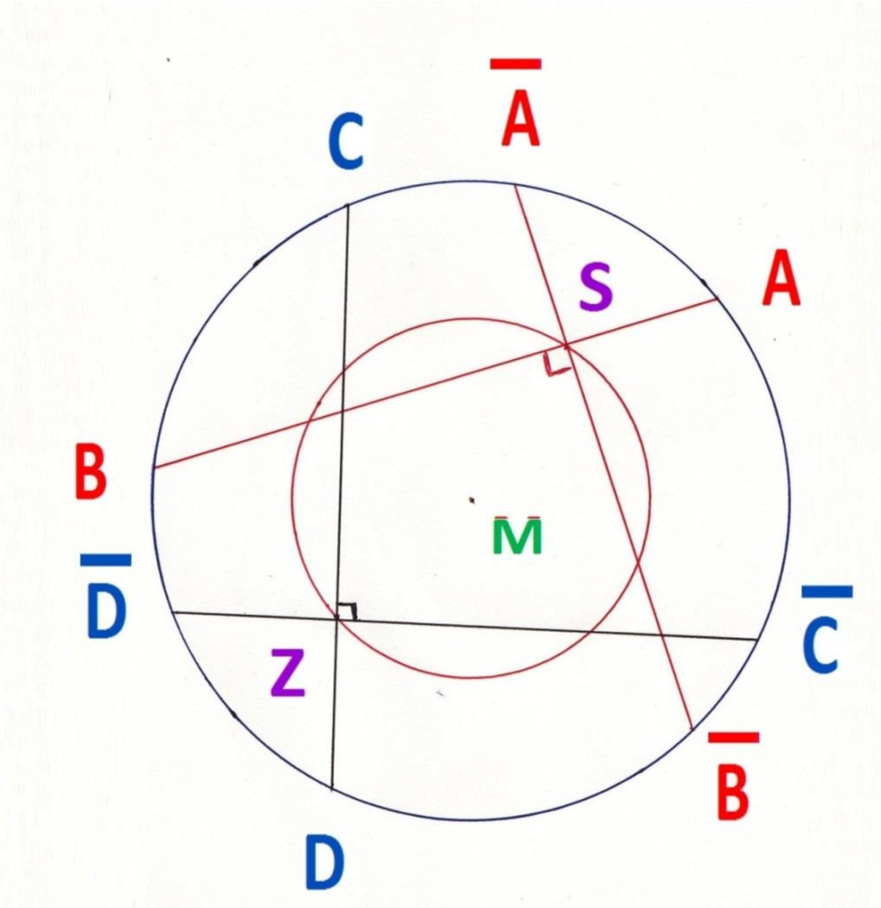
* إذا اشتركت دائرتان في مركز دائرى واحد فإن مجموع مربعي أي وترين متعامدين للدائرة الكبرى ومتقاطعين في نقطة تقع علي محيط الدائرة الصغرى = مقدار ثابت

$$= 2\left(d^2 - 2r^2\right)$$

حيث :

d هو قطر الدائرة الكبرى .

، r هو نصف قطر الدائرة الصغرى .

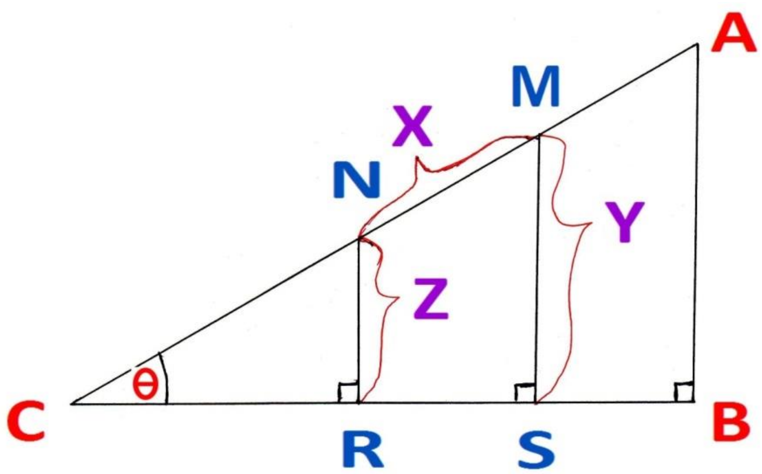


$\bar{A}$
C
S
A
B
M
$\bar{D}$
$\bar{C}$
Z
$\bar{B}$
D

نظرية أعمدة المثلث القائم

* إذا سقط عمودين من أي نقطتين ينتموا إلي وتر المثلث القائم على أحدى ضلعي القائمة فإن :

العمود الأكبر = العمود الأصغر + (المسافة بين النقطتين × جيب الزاوية المقابلة للعمودين) .



* المعطيات :

ABC مثلث قائم الزاوية في **B** ، **M , N** هم نقطتين علي الوتر **AC** . أسقط العمودان **MS , NR** على الضلع **BC** ليلاقياه في **S** , **R** علي الترتيب ، المسافة بين النقطتين **M , N = X** كما أن الزاوية **C = θ** و العمود الأكبر = **Y** ، العمود الأصغر = **Z** .

* المطلوب :

إثبات أن : $\boxed{Y = Z + X \sin\theta}$

* البرهان :

$$Y = CM \sin\theta = (X + CN)\sin\theta$$

$$= X \sin\theta + CN \sin\theta$$

$$= X\sin\theta + Z$$

i . e

$$Y = Z + X \sin\theta$$

أي أن العمود الأكبر Y يساوي العمود الأصغر Z + (المسافة بين نقطتي الإسقاط × جيب الزاوية المقابلة لأعمدة الإسقاط) .

وهو المطلوب إثباته

نظرية نقاط مستوى الدائرة

* مجموع مربعات بعدي نقطة في مستوى دائرة عن طرفي أي قطر فيها =
مقدار ثابت = $2 (X^2 + R^2)$

حيث :

X هي بعد النقطة عن مركز الدائرة ، R هي نصف قطر الدائرة .

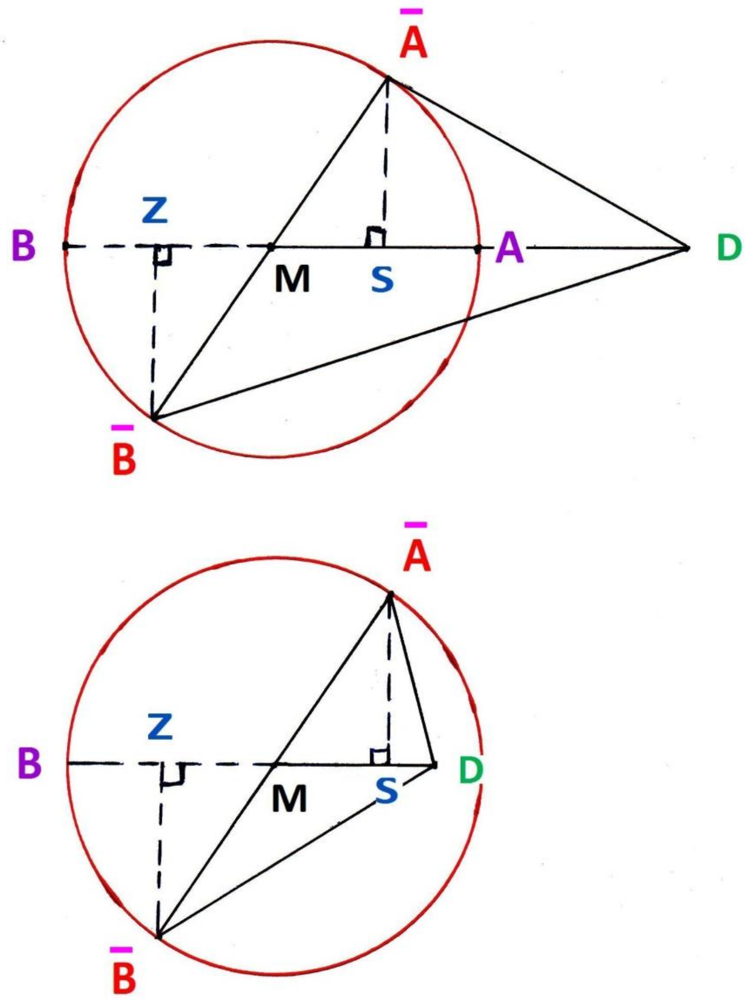


Fig (A)

المعطيات :

$\overline{AB}$ قطر في الدائرة **M** ، **D** نقطة في مستوى الدائرة خارج أو داخل الدائرة كما هو واضح في الشكلين في **(A) Fig** .

*** المطلوب :**

إثبات أن مجموع مربعي بعدي النقطة **D** عن $\bar{A}$, $\bar{B}$ = $2\,(X^2 + R^2)$

حيث :

X هي بعد النقطة **D** عن مركز الدائرة **M** ، **R** هو نصف قطر الدائرة **M** .

*** العمل :**

نمد **D M** على استقامته ليلاقي محيط الدائرة **B** ثم نسقط العمود $\bar{A}S$ على **D M** ، ثم نسقط العمود $\bar{B}Z \perp DB$

*** البرهان :**

في المثلثان $\Delta\,\bar{A}SM$, $\Delta\,\bar{B}ZM$ فيهما :

$$\bar{A}M = \bar{B}M = R\,,$$

$$\angle\,\bar{A}SM = \angle\,\bar{B}ZM = 90^o\,,$$

$$\angle\,\bar{A}SM = \angle\,\bar{B}ZM$$

$\therefore$ ينطبق المثلثان وينتج أن : $SM = ZM$

$$* \quad (D\bar{A})^2 = (DS)^2 + (AS)^2$$

$$= (DS)^2 + R^2 - (SM)^2 \quad \dots\dots(1)$$

$$, \quad (D\bar{B})^2 = (DZ)^2 + (\bar{B}Z)^2$$

$$= (DZ)^2 + R^2 - (ZM)^2 \quad \dots\dots(2)$$

- بجمع (1) , (2) يكون :

$$(D\bar{A})^2 + (D\bar{B})^2 = 2R^2 + [(DS)^2 +$$

$$+ (DZ)^2 - 2(SM)^2] \quad \dots\dots(3)$$

$$* \quad (DM)^2 = (DS)^2 + (SM)^2 +$$

$$2(DS \,.\, SM) \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$, \quad (DZ)^2 = (DM)^2 + (MZ)^2 +$$

$$2(DM \,.\, MZ)$$

$$\therefore \quad (DM)^2 = (DZ)^2 - (MZ)^2 -$$

$$2(DM \,.\, MZ) \quad \dots\dots\dots(5)$$

* بجمع (4) و (5) نجد أن :

$$2(DM)^2 = (DS)^2 + (DZ)^2 +$$

$$[2(DS \,.\, MS) - 2(DM \,.\, MS)]$$

$$= (DS)^2 + (DZ)^2 + 2\,MS$$

$$(DS - DM)$$

$$= (DS)^2 + (DZ)^2 + 2\,SM\,(-SM)$$

$$\therefore 2(DM)^2 = (DS)^2 + (DZ)^2 - 2(SM)^2 \dots\dots\dots\dots(6)$$

بالتعويض من (6) في (3) يكون :

$$(D\bar{A})^2 + (D\bar{B})^2 = 2R^2 + 2(DM)^2$$

$$= 2\,(R^2 + X^2)$$

أي أنه مجموع مربعي بعدي أي نقطة في مستوى دائرة عن طرفي أي قطر للدائرة يساوى قيمة ثابتة =

$$= 2\,(R^2 + X^2)$$

حيث:

R هي نصف قطر الدائرة .

و X هي بعد النقطة عن مركز الدائرة .

وهو المطلوب إثباته

نتيجة ١ لنقاط مستوى الدائرة

* لأي نقطة **S** في مستوى تبعد مسافة **X** عن مركز مضلع هندسي زوجي منتظم طول ضلعه **L** وعدد أضلاعه **n** يكون مجموع مربعات أبعاد هذه النقطة عن رؤوس هذا المضلع =

$$= n\left[X^2 + \left(\frac{1}{2}\, L\, \operatorname{cosec}\frac{180}{n}\right)^2\right]$$

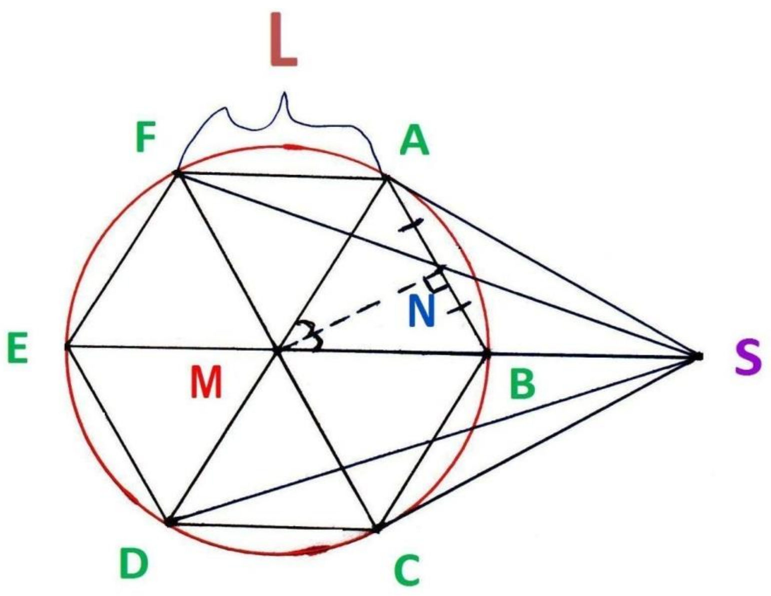


Fig (B)

* البرهان :

بالنظر في **Fig (B)** نجد أن :

- أقطار المضلع تقسم مركز لمضلع إلي **n** من الزوايا قيمة كل منها $= \dfrac{360}{n}$

- في المثلث $\Delta\ AMB$ فإذا أسقط العمود NM ليكون عمودي علي AB فإن العمود يقسم المثلث $\Delta\ AMB$ إلي مثلثين منطبقين .

$$\therefore\ \angle\ AMN = \frac{180}{n}$$

$$*\ (SA)^2 + (SD)^2 = 2\,[(SM)^2 + (AM)^2] \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$*\ (SF)^2 + (SC)^2 = 2\,[(SM)^2 + (AM)^2] \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$*\ (SB)^2 + (SE)^2 = 2\,[(SM)^2 + (AM)^2] \quad \dots\dots\dots(3)$$

بجمع (1) و (2) و (3) يكون :

مجموع مربعات أبعاد النقطة S عن رؤوس المضلع =

$$2[3(SM)^2 + 3(AM)^2] =$$

$$= [6(SM)^2 + (AM)^2] =$$

$$= n\left[X^2 + \left(\frac{1}{2}\ L\ \mathrm{cosec}\ \frac{180}{n}\right)^2\right]$$

حيث n هي عدد أضلاع المضلع الزوجي

، X هي بعد النقطة S عن مركز المضلع.

، L هو طول ضلع المضلع.

نتيجة 2

* لأى نقطة فى الفراغ على بعد ثابت من مركز كرة يكون مجموع مربعي بعدي النقطة عن طرفي أي قطر في الكرة =

$$2\left(R^2 + X^2\right) = \text{مقدار ثابت}$$

حيث :

R هي نصف قطر الكرة .

, X هي بعد النقطة عن مركز الكرة .

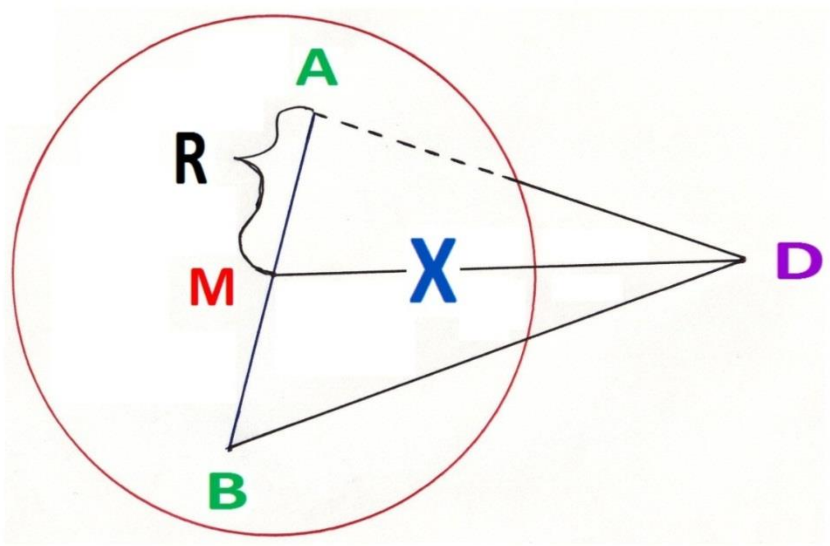


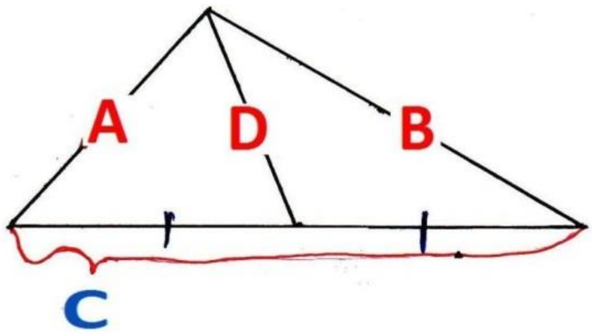
Fig (C)

ثلاث نقط $\xleftarrow{\cdots}$ A, B, D *

∴ هم في مستوى واحد .

نتيجة 3

في أي مثلث يكون مجموع مربعي ضلعين متجاورين فيه = ضعف مربع المتوسط المشترك مع الضلعين في الرأس + نصف مربع الضلع الثالث .



$$\boxed{A^2 + B^2 = 2D^2 + \frac{1}{2} C^2}$$

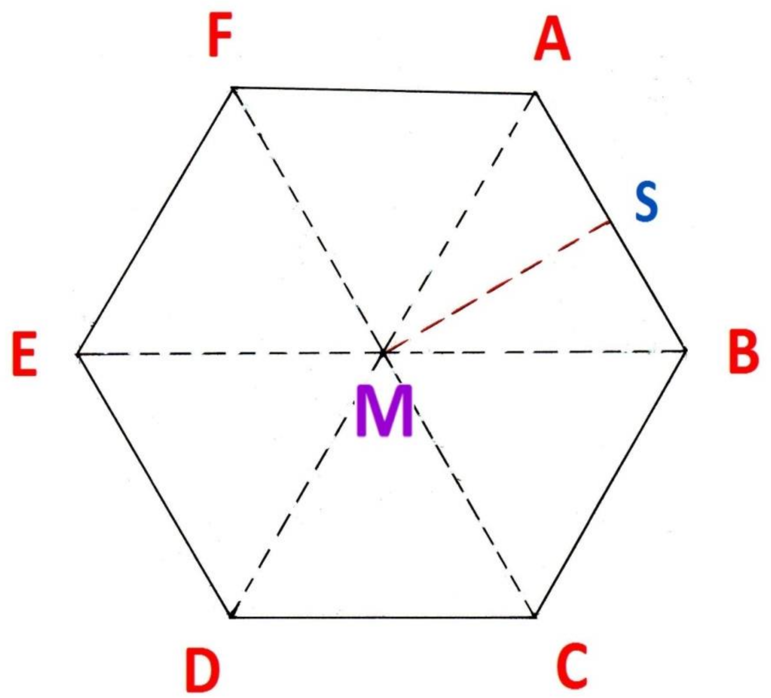
نظرية دوائر المضلع

* في أي مضلع هندسي منتظم يكون :

$$* \quad \frac{\text{مساحة الدائرة الخارجية}}{\text{مساحة الدائرة الداخلية}} = \sec^2 \frac{180}{N} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$* \quad \frac{\text{محيط الدائرة الخارجية}}{\text{محيط الدائرة الداخلية}} = \sec \frac{180}{N} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

حيث **N** هي عدد أضلاع المضلع .



* المعطيات :

A B C D E F مضلع هندسي منتظم عدد أضلاعه **N** ومركزة **M**

وهو أيضاً مركز دائرتاه الداخلية والخارجية .

* **المطلوب :**

إثبات بند (2) و (1) فى منطوق النظرية .

* **العمل :**

- نسقط العمود $MS \perp AB$.

- نصل **M** بكل من **F** و **E** و **D** و **C** و **B** و **A** .

* **البرهان :**

- في المضلع الهندسي المنتظم يكون جميع المستقيمات الواصلة بين المركز ورؤوس المضلع تكون متساوية وأن كل منهم يقسم زاوية الرأس إلي نصفين متساويين .

- وأن الأعمدة الساقطة من مركز المضلع المنتظم علي أضلاع المضلع جميعها متساوية و تنصف الاضلاع .

- كما أن جميع المثلثات التي قاعدة كل منها ضلع من أضلاع المضلع ورؤسها هو مركز المضلع تكون متساوية الساقين وجميعها متطابقة .

- **MA** هو نصف قطر الدائرة الخارجية .

- **MS** هو نصف قطر الدائرة الداخلية .

- **AS** يقسم الزاوية $\angle$ **AMS** إلى نصفين متساويين .

$$\because \ \angle AMB = \frac{360}{N}$$

$$\therefore \ \angle AMS = \frac{180}{N}$$

$$\therefore \ \frac{\text{external circle area}}{\text{internal circle area}} = \frac{\pi\,(MA)^2}{\pi\,(MS)^2}$$

$$= \frac{(MA)^2}{(MS)^2} = \sec^2 \frac{180}{N}$$ وهو المطلوب أولاً

* بالمثل :

$$= \frac{\text{محيط الدائرة الخارجية}}{\text{محيط الدائرة الداخلية}}$$

$$= \frac{2\pi\,(MA)}{2\pi\,(MS)} = \frac{(MA)}{(MS)} =$$

$$= \sec \frac{180}{N}$$

وهو المطلوب ثانياً .

نتيجة

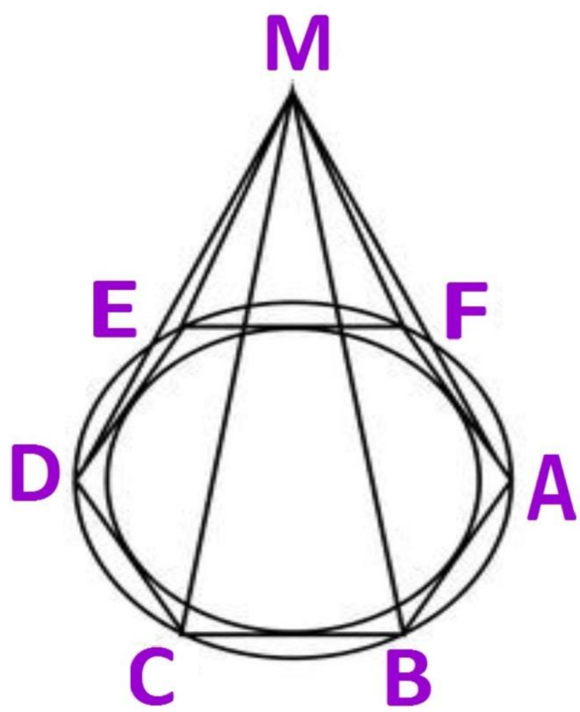
- في أي هرم قاعدته مضلع هندسي منتظم يكون :

$$= \frac{\text{حجم المخروط الخارجي للهرم}}{\text{حجم المخروط الداخلي للهرم}}$$

$$= \sec^2 \frac{180}{n}$$

حيث **n** هي عدد أضلاع قاعدة الهرم.

نتيجة نظرية شكشك لدوائر المضلع



* المعطيات :

$M.ABCDEF$ هرم قاعدة مضلع هندسي منتظم عدد أضلاعه n وارتفاعه X .

* **المطلوب :**

إيجاد النسبة بين حجم المخروط الخارجي إلي حجم المخروط الداخلي للهرم .

* **البرهان :**

$$\frac{\text{حجم المخروط الخارجي}}{\text{حجم المخروط الداخلي}} = \frac{\frac{1}{3}\ \text{القاعدة الخارجية} \times X}{\frac{1}{3}\ \text{القاعدة الداحلية} \times X}$$

$$= \frac{\text{مساحة قاعدة المخروط الخارجي}}{\text{مساحة قاعدة المخروط الداخلي}}$$

لكن قاعدتا المخروطان هما دائرتان لمضلع هندسي منتظم هو قاعدة الهرم .

$$\therefore \quad \frac{\text{حجم المخروط الخارجي}}{\text{حجم المخروط الداخلي}} = \sec^2 \frac{180}{n}$$

وهو المطلوب .

جامعة القاهرة - كلية العلوم

قسم الرياضيات

السيد الأستاذ الدكتور / رئيس مجلس قسم الرياضيات

تحية طيبة وبعد ....

تجدون فيما يلي التقرير الخاص عن فحص المادة العلمية المقدمة من الباحثة/هدى عاطف شكشك عبد المجيد - قامت الباحثة بصياغة واثبات عدة نظريات في مجال الهندسة المستوية والفراغية:

المادة العلمية تعالج الخواص الهندسية في مجال الهندسة المستوية والفراغية مثل الحجم الناتج عن دوران أشكال هندسية (مثلث، شبة منحرف) حول أحد أضلاعها وأيضاً بعض خواص المخاريط الداخلية للكرة ويلي ذلك إيجاد العلاقة بين مساحتى الدائرتين الخارجية والداخلية لمضلع منتظم وبالمثل نظريتان للمكعب والهرم الثلاثي المنتظم والعلاقة بين الكرة الداخلية والخارجية المصاحبة لهم ويلي ذلك نظريتي الشكل الرباعى وأعمدة المثلث القائم ويعقب ذلك نظريتي الدوائر المتتالية والاهرامات المتناشئة، وأخيراً نظرية نقاط المستويات المتقاطعة، منطوق النظريات واضح والبراهين تعتمد على المبادئ الاساسية في الهندسة المستوية والفراغية.

بالرغم من أن الطرق المستخدمة من براهين أولة وبسيطة إلا انه يوجد نتائج التي قد تكون ذات قيمة:

١- نظرية الدوائر المتتالية التى تعطي العلاقة بين نصف قطر دائرة ونصف أقطار متتابعة من الدوائر المماسة من الخارج كل منهم يمس مستقيمين متقاطعين

نق$_{ن}$ = نق(1+ جا θ)^{ن} / (1– جا θ)^{ن}

نق$_{-ن}$ = نق(1– جا θ)^{ن} / (1+ جا θ)^{ن}

محمد سيد أحمد
٢٠١٧/٢/١٦

جامعة القاهرة
كلية العلوم

تعتمد
٢٠١٧/٢/٢٠

٢. نظرية الاهرامات المتناشئة التى تأتي بالعلاقة بين أطوال أضلاع متتابعة من الاهرامات الخارجية (طول أضلاعها يتزايد) وأهرامات داخلية (طول أضلاعها يتناقص) منشئة من هرم ثلاثي منتظم طول ضلعه ل

$ل_ن = (٣)^ن ل$ ، $ل_{-ن} = (١/٣)^ن ل$

٣. نظرية نقاط المستويات المتقاطعة التي نقول أن النقط التى تتناسب أبعادها عن مستويين متقاطعين تكون واقعة في مستوى واحد يمر بخط نقاط المستويات والعكس صحيح.

بناءً على ما قامت به الباحثة من صياغة وإثبات هذه فإن المجهود المبذول يستحق الإشادة والتقدير.

وتفضلوا سيادتكم بقبول فائق الاحترام،،،

مقدمه لسيادتكم

د. عمرو محمد عباس سيد أحمد
مدرس بقسم الرياضيات
كلية العلوم ـ جامعة القاهرة

عمرو سيد أحمد

١٦/٢/٢٠١٧

تعتمد

د.

١٥/٢/٢٠

جمهورية مصر العربية
المجلس الاعلى للثقافة
الامانة العامة
الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات
ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: ٣٩ عدد المرفقات ٧م تاريخ الأيداع ٢٣ / ١ / ٢٠١٢ الساعة ١١:٥١:١٧

اسم طالب الإيداع: هدى عاطف شكشك عبد المجيد ـ تحت ولايه والدها/ عاطف شكشك عبد المجيد

رقم الأيداع: ٢٠١٢٠٠٠٣٩ الجنسية: مصرية التليفون: ٠١٢٢٨٩١٧٣١٥-٠٤٤٦٣٠٧٤٥

محل الأقامة: القلج البلد ـ مركز الخانكة ـ القليوبية ـ ١٠ش صدقى عمارة

الحى : مركز الخانكة المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة: ـــــ

اسم الوكيل: ـــــ التليفون: ـــــ

محل الأقامة: ـــــ

عنوان المصنف: نظريات رياضية فى الهندسة المستوية والفراغية

نوع المصنف: مصنف علمى مكتوب ـ نظريات رياضية

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

عدد(٣) نظرية : نظرية تناسب الحجوم لهرم ثلاثى منتظم ـ نظرية تناسب الحجوم والمساحات السطحية لمكعب ـ نظرية التناسب للمساحات والمحيطات لمضلع ،** تم

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف

*- صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح) رقم ٠١٨٣٧١١

*- صورة رقم قومي ٢٦٢٢٧١٤٠١٤١٦

الموظف المختص بالإيداع

المراجعة

٢٢/١/٢٠١٢

٤٧٢٥٥

مدير إدارة
(حقوق المؤلف)

٢٢/١/٢٠١٢

أستخرجت هذه الشهادة بناء على طلب طالب الايداع ودون أدنى مسئولية على ادارة حقوق المؤلف بالادارة المركزية للشئون الادبية والمسابقات بوزارة الثقافة ـ تنفيذ المادة (١٤) و المادة (١٦) من اللائحة التنفيذية للكتاب الثالث من قانون حماية الملكية الفكرية رقم (٨٢) لسنة ٢٠٠٢ الصادر بقرار رئيس مجلس الوزراء رقم (٤٩٧) لسنة ٢٠٠٥م والقرار الوزارى رقم (٣٣٤) لسنة ٢٠٠٥م

جمهورية مصر العربية
المجلس الاعلى للثقافة
الامانة العامة
الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات
ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: ٧٤ عدد المرفقات ٦م تاريخ الأيداع ١٩ / ٢ / ٢٠١٢ الســاعة ١٢:٢٠:٣٩

اسم طالب الإيداع: هدى عاطف شكشك عبد المجيد - تحت ولايه والدها/ عاطف شكشك عبد المجيد

رقم الأيداع: ٢٠١٢٠٠٠٧٤ الجنسية: مصرية التليفون: ٠١٢٢٨٩١٧٣١٥-٤٤٦٣٠٧٤٥

محل الأقامة: القلج البلد - مركز الخانكة - القليوبية - ١٠ش صدقى عمارة

الحى : مركز الخانكة المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة: ———

اسم الوكيل: ——— التليفون: ———

محل الأقامة: ———

عنوان المصنف: نظريات فى الهندسة الفراغية

نوع المصنف: مصنف مكتوب - رياضيات

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

وهي كالأتي :-" ٤ " نظرية شكشك للهرم الثلاثي المنتظم - "٥" نظرية شكشك لدوران المثلث نتيجة لنظرية "١" (نظرية شكشك لتناسب المساحات والمحيطات للمضلع "٠** تم

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف
*- صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح) رقم ٠١٨٣٧٤٧
*- صورة رقم قومي ٢٦٢١٠٠٧١٤٠١٤١٦

الموظف المختص بالايداع
المراجعة

مدير إدارة
(حقوق المؤلف)
١٩/٢ ٢٠١٢

أستخرجت هذه الشهادة بناء على طلب طالب الايداع ودون أدنى مسئولية على ادارة حقوق المؤلف بالادارة المركزية للشئون الادبية والمسابقات بوزارة الثقافة - تنفيذ المادة ([illegible]) من اللائحة التنفيذية للكتاب الثالث من قانون حماية الملكية الفكرية رقم (٨٢) لسنة ٢٠٠٢ الصادر بقرار رئيس مجلس الوزراء رقم (٤٩٧) لسنة ٢٠٠٥م والقرار الوزارى رقم (٣٣٤) لسنة ٢٠٠٥م

جمهورية مصر العربية
المجلس الاعلي للثقافة
الامانة العامة
الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات
ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: ٢٧ عدد المرفقات ١٦م تاريخ الأيداع ٢٩ / ١ / ٢٠١٣ الســاعة ١١:١٥:٣٦

اسم طالب الإيداع: هدى عاطف شكشك عبدالمجيد

رقم الأيداع: ٢٠١٣٠٠٠٢٧ الجنسية: مصرية التليفون: ٠٢٤٤٦٣٠٧٤٥

محل الأقامة: ٧ش صدقى عماره -القلج البلد -مركز الخانكة -القليوبية

الحى : مركز الخانكة المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة: —

اسم الوكيل: — التليفون: —

محل الأقامة: —

عنوان المصنف: بحث فى الهندسة الفراغية

نوع المصنف: مصنف مكتوب - رياضيات

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

أولاً :- نظرية شكشك لدوران شبه المنحرف حول قاعدتيه
ثانياً:- نظرية شكشك لمخاريط الكرةومضاف إليه خمس نتائج وخمس حقائق وستة تعاريف تم**

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف *- صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح) رقم ٠٩٠٢٦٧١

*- صورة رقم قومى ٢٩٥٠٢١٨١٤٠٠٨٨٣

الموظف المختص بالإيداع

المراجعة

مدير إدارة
(حقوق المؤلف)
٢٩/١/٢٠١٣

٤٧٢٥٥

أستخرجت هذه الشهادة بناء على طلب طالب الايداع ودون أدنى مسئولية على ادارة حقوق المؤلف بالادارة المركزية للشئون الادبية والمسابقات بوزارة الثقافة - تنفيذ المادة (١٤) و المادة (١٦) من اللائحة التنفيذية للكتاب الثالث من قانون حماية الملكية الفكرية رقم (٨٢) لسنة ٢٠٠٢ الصادر بقرار رئيس مجلس الوزراء رقم (٤٩٧) لسنة ٢٠٠٥م والقرار الوزارى رقم (٣٣٤) لسنة ٢٠٠٥م

جمهورية مصر العربية
المجلس الاعلي للثقافة
الامانة العامة
الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات
ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: ٤٣٠ عدد المرفقات ٥٣م تاريخ الأيداع ١٦ / ١٠ / ٢٠١٦ الساعة ص ١٨:١٠:١٠

اسم طالب الإيداع: هدى عاطف شكشك عبدالمجيد

اسم الشهرة:

رقم الأيداع: ١٧٠١٦٠٠٤٣٠ الجنسية: مصرية التليفون: ٠٢٤٤٦٣٠٧٤٥٠

محل الأقامة: ٧ش صدقى عماره - القلج البلد - مركز الخانكة - القليوبية

الحى : مركز الخانكة المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة: ــــ

اسم الوكيل: التليفون: ــــ

محل الأقامة: ــــ

عنوان المصنف: نظريات فى الهندسة المستوية والفراغية

نوع المصنف: مصنف علمي مكتوب - هندسة

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

--- عددهم (٥) نظزريات وهم
- نظرية شكشك للدوائـــــر المتتالية
- نظرية شكشك للاهرامات المتناشئة
- نظرية شكشك للشكـــــل الرباعى
- نظرية شكشك لاعمدة المثلث القائم
- نظرية شكشك لنقاط المستويات المتقاطعة ، ** تم

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف
*- صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح) رقم ٠٧٨٠٢٣١
*- صورة رقم قومى ٢٩٥٠٢١٨١٤٠٠٨٨٣

الموظف المختص بالإيداع
محمود عبد العال

المراجعة
ناهد ابو الزيد

مدير إدارة
فوزية عبد الملاح
(حقوق المؤلف)

٤٧٢٥٥

أستخرجت هذه الشهادة بناء على طلب طالب الايداع ودون أدنى مسئولية على ادارة حقوق المؤلف بالادارة المركزية للشئون الادبية والمسابقات بوزارة الثقافة - تنفيذ المادة (١٤) و المادة (١٦) من اللائحة التنفيذية للكتاب الثالث من قانون حماية الملكية الفكرية رقم (٨٢) لسنة ٢٠٠٢ الصادر بقرار رئيس مجلس الوزراء رقم (٤٩٧) لسنة ٢٠٠٥م والقرار الوزارى رقم (٣٣٤) لسنة ٢٠٠٥م

جمهورية مصر العربية
المجلس الاعلي للثقافة
الامانة العامة
الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات
ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: ٩٠٣ عدد المرفقات ٤٩م تاريخ الأيداع ٣٠ / ١ / ٢٠١٧ الســاعة ١٠:٢٥:٤٣

اسم طالب الإيداع: هدى عاطف شكشك عبد المجيد

اسم الشهرة:

رقم الأيداع: ١٧٠١٦٠٠٩٠٣ الجنسية: مصرية التليفون: ٠١٢٢٩٩٣٠٧٩٥-٤٤٦٣٠٧٤٥

محل الأقامة: القلج البلد - مركز الخانكة - القليوبية - ١٠ش صدقى عمارة

الحى : مركز الخانكة المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة: ———

اسم الوكيل: التليفون:

محل الأقامة:

عنوان المصنف: بحث فى الهندسة المستوية والفراغية

نوع المصنف: مصنف مكتوب - رياضيات

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

نظرية شكشك للأوتار المتعامدة + نتيجة
نظرية شكشك لنقاط مستوى الدائرة+ ٣ نتائج
نظرية شكشك للدوائر المتماسة المحيطية
نظرية شكشك للدوائر المتماسة الداخلية
نظرية شكشك لنقاط المستويات المتقاطعة + عكس النظرية
نظرية شكشك للمثلث + نتيجة تم**

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف *- صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح) رقم ٠٩٤٤٩٠٨

*- صورة رقم قومى ٢٩٥٠٢١٨١٤٠٠٨٨٣

الموظف المختص بالإيداع
ناهد ابو الزيد

المراجعة
٤٧٢٥٥

مدير إدارة
فوزية عبد الباسط
(حقوق المؤلف)

أستخرجت هذه الشهادة بناء على طلب طالب الايداع ودون أدنى مسئولية على ادارة حقوق المؤلف بالادارة المركزية للشئون الادبية والمسابقات بوزارة الثقافة - تنفيذ المادة (١٤) و المادة (١٦) من اللائحة التنفيذية للكتاب الثالث من قانون حماية الملكية الفكرية رقم (٨٢) لسنة ٢٠٠٢ الصادر بقرار رئيس مجلس الوزراء رقم (٤٩٧) لسنة ٢٠٠٥م والقرار الوزارى رقم (٣٣٤) لسنة ٢٠٠٥م

شكر وتقدير

تتقدم وزارة التربية و التعليم بأسمى معانى الشكر و التقدير إلى

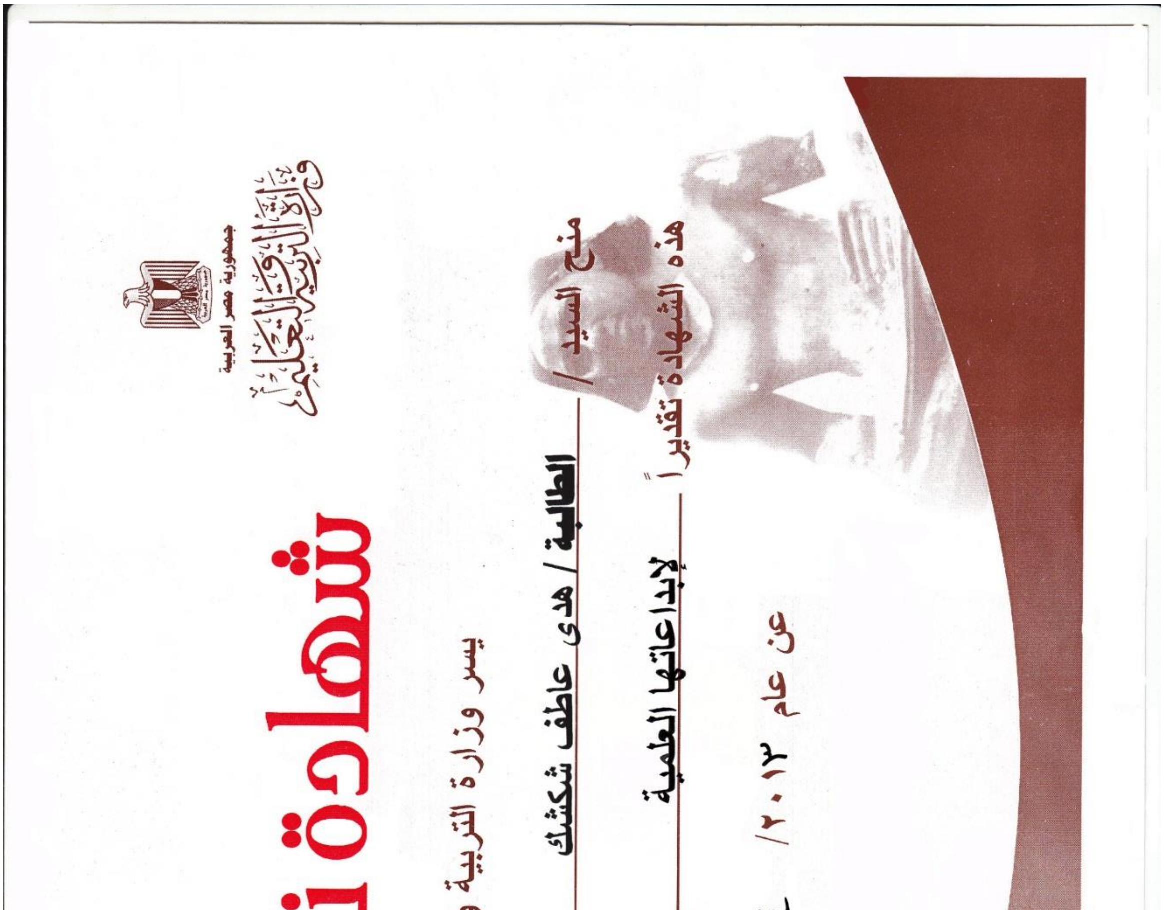
الطالبة / هدى عاطف شكشك

صاحبة نظريات فى الهندسة الفراغية

و ذلك تقديراً للآداء و المجهود المتميز

وزير التربية و التعليم

أ.د/ إبراهيم أحمد غنيم



جمهورية مصر العربية

وزارة التربية والتعليم

شهادة تقدير

يسر وزارة التربية و التعليم

منح السيد / **الطالبة / هدى عاطف شكشك**

هذه الشهادة تقديراً **لإبداعاتها العلمية**

عن عام ٢٠١٣ / ٢٠١٤م

وزير التربية و التعليم

أ.د محمود ابو النصر

يسر مكتب مستشار الرياضيات منح هذه

الشهادة إلى الطالبة / هدى عاطف شكشك عبد المجيد بالصف الثالث الثانوي

تقديراً لجهودها في الرياضيات

ونتمنى لها دوام التقدم والازدهار

تحريراً في ١٤ / ٢ / ٢٠١٢

إمضاء

حسين محمود حسين

وزارة التربية والتعليم

مكتب ... الرياضيات

تهانينا

CONGRATULATION

NILE PRINT

جمهورية مصر العربية
وزارة الدولة لشئون البحث العلمى

أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا

براءة اختراع
رقم ٢٧٠١٤

رئيس أكاديمية البحث العلمي و التكنولوجيا
بعد الاطلاع علي المادة ١٩ من قانون حماية حقوق الملكية الفكرية الصادر بالقانون رقم ٨٢ لسنة ٢٠٠٢ ، وعلى قرار رئيس الجمهورية رقم ٣٧٧ لسنة ١٩٩٨ بإعادة تنظيم أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا ، وعلى طلب البراءة المقدم تحت رقم ٦١٢ فى ٢٠١٢/٤/٣والمستندات الملحقة به ، قرر

مادة ١	:	تمنح براءة اختراع تحت رقم ٢٧٠١٤
إلى	:	هدى عاطف شكشك عبد المجيد
المركز العام	:	١٠ شارع صدقى عمارة – القلج البلد – مركز الخانكة – القليوبية – جمهورية مصر العربية
عن اختراع تحت مسمى	:	جهاز لتخليص الهواء من ثانى أكسيد الكربون وتحويله كيميائياً إلى أكسجين وتعقيم الهواء
أسم المخترع	:	هدى عاطف شكشك عبد المجيد
مدة البراءة	:	عشرون عاماً تبدأ من يوم ٢٠١٢/٤/٣،وقد توضح بياناتها في الوثائق المعتمدة المرفقة بهذه الشهادة
مادة ٢	:	صدر هذا القرار في القاهرة يوم ٣١ مارس ٢٠١٥
مادة ٣	:	على الجهة المختصة نشره في جريدة براءات الاختراع

لا يعنى منح هذه البراءة إعطاء الحق بتسويق المنتج داخل جمهورية مصر العربية ، ولتسويق المنتج موضوع هذه البراءة يلزم اتباع الإجراءات والقواعد القانونية المعمول بها للحصول على حق التسويق والتداول داخل جمهورية مصر العربية من الوزارات المعنية ، والصورة المترجمة من هذه الوثيقة لا يعتد بها إلا بعد اعتمادها من مكتب البراءات المصري وتوثيقها من الجهات الرسمية المختصة .

رئيس
مكتب براءات الاختراع
"أ. عادل السعيد عويضة"

رئيس
أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا
" أ. د. محمود محمد صقر "

شهادة تقدير

تتقدم كلية العلوم - جامعة عين شمس بخالص التهنئة

للطالبة/ هدى عاطف شكشك عبد المجيد

الطالبة بالفرقة الثالثة - قسم الرياضيات

شعبة الرياضيات البحتةوعلوم الحاسب بمناسبة حصولها

على براءة إختراع من أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا

مع أطيب التمنيات بدوام التقدم والتفوق

عميد الكلية

٢١/٥/٢٠١٥

أ.د/أحمد على إسماعيل

جمهورية مصر العربية
وزارة الدولة لشئون البحث العلمى
أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا
مكتب براءات الاختراع

٢٠١٢٠٤٠٦١٢

محضر إيداع المستندات الخاصة بطلب براءة الاختراع*

إيصال استلام
رقم

٢/١٥
١ س ع

(٢١) طلب براءة اختراع رقم : ٢٠١٢/٠٦١٢

(٢٢) تاريـخ تقديـم الطلـب : ٢٠١٢/٤/٣

(٧١) اسـم طالـب البـراءة : **هدى عاطف شكشك عبد المجيد شكشك**

محل الإقامة / المركز المـالى : **١٠ شارع صدقى عماره – القلج البلد – مركز الخانكه – القليوبيه**

(٥٤) التسمية التى تدل على موضوع الاختراع: **جهاز يزيد نسبة الاكسوجين فى الجو ويخفض نسبة ثانى أكسيد الكربون ويعقم ويفلتر الهواء .**

مقدم ١ طلب معفى من سداد الرسوم حيث انه طالب طبقا للقرار الوزارى رقم ٢ لسنة ٢٠٠٢
عضو

رقم المستند	نوع المستند	عدد الصفحات
١	استمارة طلب براءة اختراع	٩
٢	الوصف المختصر باللغة العربية (من ثلاث نسخ)	١
٣	الوصف المختصر باللغة الإنجليزية (من ثلاث نسخ)	١
٤	الوصف الكامل للاختراع باللغة العربية ٤-١ الفن السابق ٤-٢ المشكلة أو القصور فى الفن السابق ٤-٣ الجديد فى موضوع الاختراع ٤-٤ الوصف التفصيلى ٤-٥ طريقة الاستغلال ٤-٦ العناصر الجديدة المطلوب حمايتها ٤-٧ لوحات الرسم و شرحها ٤-٨ بيان بالطلبات التى قدمت بالخارج عن ذات الاختراع / نموذج المنفعة **(أو تعهد بتقديم الوصف الكامل خلال مهلة ٦ أشهر)**	١٢
٥	استمارة استيفاء بيانات من جهة العمل (المصريين فقط) (أو تعهد بتقديمها خلال أربعة أشهر) شهادة قيد مدرسية اصل	١
٦	نموذج التعليمات و إقرار باستلامه	٢
٧	مستند الأسبقية (أو طلب الحصول على مهلة ثلاثة أشهر)	
٨	مستند التوكيل (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
٩	مستند التنازل (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
١٠	مستند يدل على التواجد القانوني للشخص المعنوي (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
١١	الوصف الكامل باللغة الإنجليزية(بالنسبة للطلبات المقدمة من أجانب)	
١٢	إقرار النشر	
١٣	تقديم شهادة تثبت ايداع مزرعة حية من موضوع الطلب بأحد المعامل المعتمدة من الوزير المختص بشئون البحث العلمى (أو تعهد بتقديم المستند خلال أربعة أشهر)	
١٤	تقديم المستندات الدالة على حصول المخترع على مصدر المواد البيولوجية النباتية أو الحيوانيـة أو المعارف التقليدية الطبية أو الصناعية أو الحرفية ، أو تراثًا حضاريًا أو بيئيًا بطريق مشروعة وفقًا للتشريعات النافذة فى جمهورية مصر العربية (أو تعهد بتقديم المستندات خلال أربعة أشهر)	
١٥	أخرى صورة بطاقة	٢

عدد

مجموع المستندات
٧

نادية
٢٠١٢/٤/٢

عنوان المراسلة : **١٠ شارع صدقى عماره – القلج البلد – مركز الخانكه – القليوبيه**

اسم الوكـــيل :.

المحل المختار :.

* (يتم استيفاء هذا المستند من قبل الموظف المسئول بمكتب براءات الاختراع)

(عن رئيس مكتب براءات الاختراع)

Arab Republic of Egypt Ministry of Scientific Research Academy of scientific Research & Technology **PATENT OFFICE**	EGYPTIAN PATENT OFFICE مكتب براءات الاختراع المصرى	جمهورية مصر العربية وزارة الدولة لشئون البحث العلمى أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا مكتب براءات الإختراع

محضر ايداع مستندات طلب براءة اختراع

رقم الطلب : ٢٠١٦/١٤٢٥	**رقم الإيصال** :	**التاريخ**: ٢٠١٦/٨/٢٥ **الوقت**: ١١:٥٠
أسم الطالب : هدى عاطف شكشك عبد المجيد		الجنسية: مصري

مسمى الاختراع: جهاز يفلتر ويعقم الهواء ويزيد نسبة الأكسجين ويخفض نسبة ثاني أكسيد الكربون

بيان المستندات المستلمة مع الطلب	أسم الوكيل (إن وجد):

1 - نموذج طلب براءة اختراع أو شهادة منفعة	☒
2 - وصف تفصيلي للاختراع عربي	☒
3 - الرسم الخاص بالاختراع إذا كان ضروريا إدراك الاختراع أو كان طابع الاختراع يسمح بذلك	☐
4 - ملخص الاختراع باللغة العربية والانجليزية مصحوبا بأفضل رسم توضيحي إن وجد	☒
5- مستخرج من السجل التجاري أو مستخرج رسمي من عقد التأسيس إذا كان الطالب شركة أو هيئة	☐
6 - سند الوكالة إذ أودع الطلب بواسطة وكيل	☐
7 - المستند الدال على أحقية الطالب في الاختراع إذا كان الطالب غير المخترع (التنازل)	☐
8 - موافقة صاحب الشأن إذ كانت العناصر الجوهرية للاختراع قد تم الحصول عليها من اختراع شخص آخر	☐
9 - إذا كان الطلب يتضمن الرغبة في اعتبار الأولوية في التسجيل لطلب سبق تقديمه في دولة تكون طرفا في اتفاقية أو معاهدة دولية مع دولة جمهورية مصر العربية وفقا للمادة (11) من القانون فانه يجب تقديم صورة من الطلب السابق و المستندات المرفقة به مصحوبة بشهادة تبين تاريخ و رقم إيداعه و الدولة التي أودع فيها موثق ومصدقا علية.	☐
10 - مستندات طلب (PCT) المنشور و تقرير البحث و الفحص الفني	☐
11 - الشهـادة الصادرة بالحمـايـة المـؤقـتة إن وجـدت	☐
١٢ - تعهد كتابي بتقديم اللازم من المستندات عدا المرفق بالطلب منها (من 4 - 11)	☐
13 - اخرى نموذج المعلومات + أصل قيد + صورة التوكيل	☒

اسم المستلم: هند قاسم	مجموع المستندات المستلمة: ٧
التوقيع:	الختم:

* يؤشر بعلامة ☒ أمام المستندات المستلمة .
مدة براءة الاختراع (عشرون سنة) , و مدة شهادة المنفعة (سبع سنوات) , ويجب سداد الرسم السنوي في بداية كل سنة اعتبارا من السنة التالية لتاريخ تقديم الطلب و بانتظام .

1

Arab Republic of Egypt Ministry of Scientific Research Academy of scientific Research & Technology **PATENT OFFICE**	EGYPTIAN PATENT OFFICE EGPO مكتب براءات الاختراع المصرى	جمهورية مصر العربية وزارة الدولة لشئون البحث العلمى أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا مكتب براءات الإختراع

محضر ايداع مستندات طلب براءة اختراع

رقم الطلب : ٢٠١٢/٩١٠	**رقم الإيصال** :	**التاريخ** : ٢٠١٢/٠٥/٢٧ **الوقت** : ١٠/١
إسم الطالب : هدى عاطف شكشك عبد المجيد شكشك		الجنسية : مصرى

مسمى الاختراع :

ماتور رفع مياة خافض للصوت (الموتور الضاغط)

بيان المستندات المستلمة مع الطلب	أسم الوكيل (إن وجد):

1- نموذج طلب براءة اختراع أو شهادة منفعة	☒
2- وصف تفصيلي للاختراع كرتي	☒
3- الرسم الخاص بالاختراع إذا كان ضروريا إدراك الاختراع أو كان طابع الاختراع يسمح بذلك كرتي	☒
4 - ملخص الاختراع باللغة العربية والانجليزية مصحوبا بأفضل رسم توضيحي إن وجد	☒
5- مستخرج من السجل التجاري أو مستخرج رسمي من عقد التأسيس إذا كان الطالب شركة أو هيئة	☐
6 - سند الوكالة إذ أودع الطلب بواسطة وكيل	☐
7 - المستند الدال على أحقية الطالب في الاختراع إذا كان الطالب غير المخترع (التنازل)	☐
8 - موافقة صاحب الشأن إذ كانت العناصر الجوهرية للاختراع قد تم الحصول عليها من اختراع شخص آخر	☐
9 - إذا كان الطلب يتضمن الرغبة في اعتبار الأولوية في التسجيل لطلب سبق تقديمه في دولة تكون طرفا في اتفاقية أو معاهدة دولية مع دولة جمهورية مصر العربية وفقا للمادة (11) من القانون فانه يجب تقديم صورة من الطلب السابق و المستندات المرفقة به مصحوبة بشهادة تبين تاريخ و رقم إيداعه و الدولة التي أودع فيها.	☐
10 - مستندات طلب (PCT) المنشور و تقرير البحث و الفحص الفني	☐
11 - الشهادة الصادرة بالحماية المؤقتة إن وجدت	☐
١٢- تعهد كتابي بتقديم اللازم من المستندات عدا المرفق بالطلب منها (من 4 - 11)	☐
13 - اخرى نموذج تعليمات - صورة بطاقة عدد (٢) - أصل اثبات قيد	☒

اسم المستلم : دعاء علوى	مجموع المستندات المستلمة: ٨
التوقيع : كرالمصر ٢٠١٢/٠٥/٢٧	الختم :

* يؤشر بعلامة ☒ أمام المستندات المستلمة .

مدة براءة الاختراع (عشرون سنة) , و مدة شهادة المنفعة (سبع سنوات) , ويجب سداد الرسم السنوي في بداية كل سنة إعتبارا من السنة التالية لتاريخ تقديم الطلب و بانتظام .

1

Arab Republic of Egypt Ministry of Scientific Research Academy of scientific Research & Technology PATENT OFFICE	EGYPTIAN PATENT OFFICE EGPO مكتب براءات الاختراع المصرى	جمهورية مصر العربية وزارة الدولة لشئون البحث العلمى أكاديمية البحث العلمى والتكنولوجيا مكتب براءات الإختراع

محضر ايداع مستندات طلب براءة اختراع

رقم الطلب : ٢٠١٢/١٢٦٩	رقم الإيصال :	التاريخ : ٢٠١٢/٨/٥ الوقت : ١/١٥
إسم الطالب : هدى عاطف شكشك عبد المجيد شكشك		الجنسية :مصرية

مسمى الاختراع : **جهاز يعالج المياه فى قاع البحر و يرفعها الى اعلى سطح البحر للأستخدام**

بيان المستندات المستلمة مع الطلب :

1- نموذج طلب براءة اختراع أو شهادة منفعة	☒
2- وصف تفصيلي للاختراع	☒
3- الرسم الخاص بالاختراع إذا كان ضروريا إدراك الاختراع أو كان طابع الاختراع يسمح بذلك	☒
4- ملخص الاختراع باللغة العربية والانجليزية مصحوبا بأفضل رسم توضيحي إن وجد	☒
5- مستخرج من السجل التجاري أو مستخرج رسمي من عقد التأسيس إذا كان الطالب شركة أو هيئة	☐
6 - سند الوكالة إذ أودع الطلب بواسطة وكيل	☐
7 - المستند الدال على أحقية الطالب في الاختراع إذا كان الطالب غير المخترع (التنازل)	☐
8 - موافقة صاحب الشأن إذ كانت العناصر الجوهرية للاختراع قد تم الحصول عليها من اختراع شخص آخر	☐
9 - إذا كان الطلب يتضمن الرغبة في اعتبار الأولوية في التسجيل لطلب سبق تقديمه في دولة تكون طرفا في اتفاقية أو معاهدة دولية مع دولة جمهورية مصر العربية وفقا للمادة (11) من القانون فانه يجب تقديم صورة من الطلب السابق و المستندات المرفقة به مصحوبة بشهادة تبين تاريخ و رقم إيداعه و الدولة التي أودع فيها.	☐
10 - مستندات طلب (PCT) المنشور و تقرير البحث و الفحص الفني	☐
11 - الشهـــادة الصادرة بالحمـايــــة المـؤقـــتة إن وجدت	☐
١٢- تعهد كتابي بتقديم اللازم من المستندات عدا المرفق بالطلب منها (من 4 - 11)	☐
13- اخرى نموذج التعليمات	☒

اسم المستلم : هند قاسم ٢٠١٢/٨/٥	مجموع المستندات المستلمة:
التوقيع : ٢٠١٢/٨/٥	الختم :

* يؤشر بعلامـة ☒ أمام المستندات المستلمة .

مدة براءة الاختراع (عشرون سنة) , و مدة شهادة المنفعة (سبع سنوات) , ويجب سداد الرسم السنوي في بداية كل سنة إعتبارا من السنة التالية لتاريخ تقديم الطلب و بانتظام .

1

الباب الثالث

نظريات الباحث عاطف شكشك

نبذة عن الباحث

ولد عاطف شكشك بمحافظة القليوبية بجمهورية مصر العربية وهو والد كل من الباحث أحمد شكشك والباحثة هدى شكشك ودرس المراحل الابتدائية والاعدادية والثانوية بالمدارس الحكومية المصرية ثم التحق بكلية العلوم قسم كيمياء وقد وضع أول نظرية له في ٢٨ فبراير عام ٢٠١٨ ثم تتالت النظريات حتى وصل عددها إلى ١٢ نظرية و قد قام باختراع عدد من الاجهزة منها جهاز لإنتاج الكربون الزرى وبوتاجاز يعمل بالماء بدل من الغاز وماكينة لحام للمعادن تعمل أيضا بالماء بدل من لحام الاكسجين والاسيتيلين وغيره من الاختراعات .

نظرية شكشك للدوائر المتماسة

* إذا تماست ثلاث دوائر ذات أنصاف أقطار R_C , R_B , R_A تماس من الخارج مثنى مثنى ، فإن المساحة المحصورة بينهم تساوى

$$= \sqrt{S\,R_A\,R_B\,R_C} - \frac{\pi\left(R_A^2\,\theta_A + R_B^2\,\theta_B + R_C^2\,\theta_C\right)}{360}$$

Where :

$$S = R_A + R_B + R_C$$

$$, \quad \theta_A\,,\theta_B\,,\theta_C$$

هم زوايا رؤوس المثلث المكون من توصيل مراكز الثلاث للدوائر A , B , C

Where :

$$\theta_A = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{S\,R_A\,R_B\,R_C}}{(R_A + R_B)\,(R_A + R_C)} \quad ,$$

$$\theta_B = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{S\,R_A\,R_B\,R_C}}{(R_B + R_A)\,(R_B + R_C)} \quad ,$$

$$\theta_C = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{S\,R_A\,R_B\,R_C}}{(R_C + R_A)\,(R_C + R_B)}$$

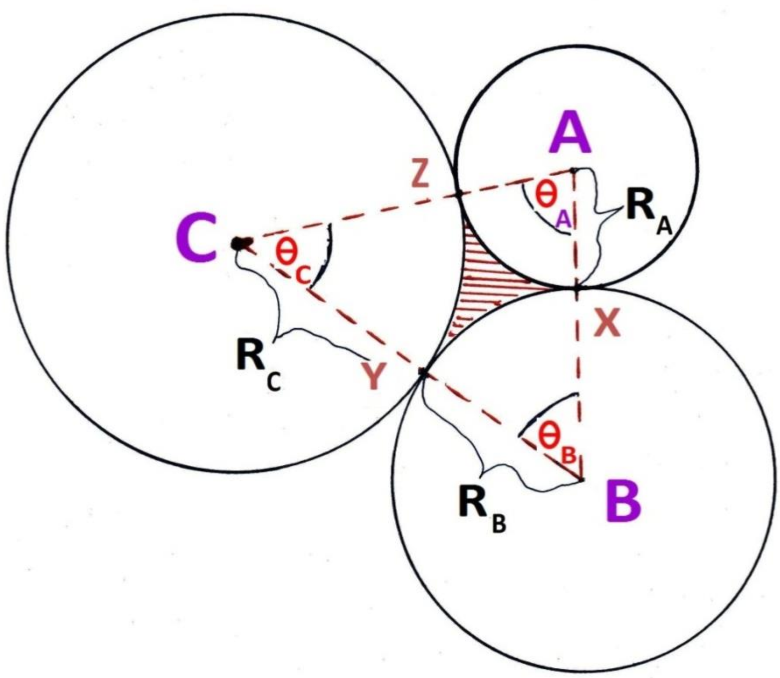


Fig (A)

* المعطيات :

A , B , C ثلاث دوائر متماسة من الخارج مثنى مثنى في نقاط تماس **X , Y , Z** وذات أنصاف أقطارهم علي الترتيب **R_A , R_B , R_C** .

* المطلوب :

إيجاد قيمة المساحة المظللة المحصورة بين الثلاث دوائر .

* العمل :

نصل مراكز الثلاث دوائر فيتكون المثلث **A B C** وزوايا روسه هي **θ_A , θ_B , θ_C** .

* البرهان :

من مبدأ أن المستقيم الواصل بين مركزي دائرتين متماستين يمر بنقطة التماس.

∴ كل من النقاط X , Y , Z تقع علي أضلاع المثلث $\Delta\ ABC$.

$$\Delta\, ABC\ area = {}^{1}/_{2}\,(R_A + R_B)\,(R_A + R_C)\ \sin\theta_A$$

so $$\sin\theta_A = \frac{2\,(\Delta\, ABC)}{(R_A + R_B)\,(R_A + R_C)} \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

but $\Delta\ ABC\ area$

$$= \sqrt{S\,[S - (R_A + R_B)]\,[S - (R_B + R_C)]}\ \sqrt{[S - (R_C + R_A)]}$$

Were : $S = (R_A + R_B + R_C)$

∴ $\Delta\ ABC\ area$

$$= \sqrt{S\,[(R_A + R_B + R_C) - (R_A + R_B)]}\ \sqrt{[(R_A + R_B + R_C) - (R_B + R_C)]}\ \sqrt{[(R_A + R_B + R_C) - (R_C + R_A)]} =$$

$$\therefore\ \Delta\ ABC\ area = \sqrt{S\ R_C\ R_A\ R_B} \qquad \dots\dots\dots (2)$$

بالتعويض في معادلة (1) يكون :

So $$\sin\theta_A = \frac{2\sqrt{S\ R_A\ R_B\ R_C}}{(R_A + R_B)\,(R_A + R_C)}$$

Also $$\sin\theta_B = \frac{2\sqrt{S\ R_A\ R_B\ R_C}}{(R_B + R_A)\,(R_B + R_C)}$$

$$\text{Also } \sin\theta_C = \frac{2\sqrt{S\ R_A\ R_B\ R_C}}{(R_C+R_A)\ (R_C+R_B)}$$

$$\text{So } \theta_A = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{S\ R_A\ R_B\ R_C}}{(R_A+R_B)\ (R_A+R_C)}$$

$$\text{Also } \theta_B = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{S\ R_A\ R_B\ R_C}}{(R_B+R_A)\ (R_B+R_C)}$$

$$\text{Also } \theta_C = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{S\ R_A\ R_B\ R_C}}{(R_C+R_A)\ (R_C+R_B)}$$

في الدائرة A القطاع AXZ هو القطاع A في الدائرة B القطاع BXY هو القطاع B في الدائرة C القطاع CYZ هو القطاع C .

$$\sec^{\underline{n}}\ A = \frac{\pi R_A^2 .\ \theta_A}{360}$$

$$\sec^{\underline{n}}\ B = \frac{\pi R_B^2 .\ \theta_B}{360}$$

$$\sec^{\underline{n}}\ C = \frac{\pi R_C^2 .\ \theta_C}{360}$$

Summation of $\sec^{\underline{n}} A$, $\sec^{\underline{n}} B$, $\sec^{\underline{n}} C$

$$= \frac{\pi\ (R_A^2\ \theta_A + R_B^2\ \theta_B + R_C^2\ \theta_C)}{360} = N \qquad \ldots\ldots\ldots.(3)$$

$$\text{but shade area} = \Delta\ ABC - N \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$$

بالتعويض من (2) ، (3) في (4) يكون :

∴ Shade area

$$= \sqrt{S\ R_A\ R_B\ R_C} - \frac{\pi\left(R_A^2\ \theta_A + R_B^2\ \theta_B + R_C^2\ \theta_C\right)}{360}$$

وهو المطلوب إثباته

حالة خاصة

* إذا تماست ثلاثة دوائر متطابقة تماس من الخارج مثنى مثنى فإن مساحة

المنطقة المحصورة بينهم = S نق٢

حيث S هو ثابت شكشك = *0.160622237*

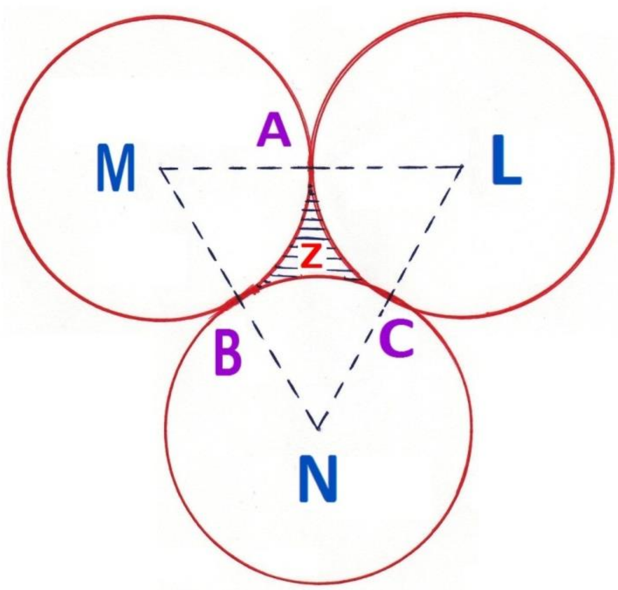


Fig (B)

* **المعطيات :**

L , M , N ثلاث دوائر متطابقة متماسة من الخارج مثنى مثنى في النقاط

A , B , C ويحصران بينهم المنطقة المظللة Z .

*** المطلوب :**

إثبات أن مساحة المنطقة **Z** المظللة =

= **S نق ^٢^**

حيث **S** هو ثابت شكشك =

= **0 . 1 6 0 6 2 2 2 3 7**

*** العمل :**

نصل كل من **NL** , **MN** , **LM** فيتكون المثلث **LMN** .

*** البرهان :**

بفرض نق = **R**

- **LM** واصل بين مركزى دائرتين متماستين من الخارج .

∴ **LM** يمر بنقطة التماس **A** .

- بالمثل **MN** يمر بنقطة التماس **B** .

- بالمثل **NL** يمر بنقطة التماس **C** .

أي أن المثلث **LMN** متساوى الأضلاع وطول كل ضلع = **2R** .

وكل من الزوايا :

$$\angle LMN = \angle MNL = \angle MLN$$

- مساحة القطاع الدائرى LAC =

$$= \pi R^2 \times \frac{60}{360} = \boxed{\frac{1}{6} \pi R^2}$$

- مساحة $\Delta\ LMN$ =

$$= {}^{1}/_{2}\ 2R \times 2R\ \sin 60 =$$

$$= 2R^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{3}\ R^2}$$

∴ مساحة المنطقة المظللة Z = مساحة المثلث LMN − 3 مساحة القطاع الدائرى LAC =

$$= \sqrt{3}\ R^2 - 3\left({}^{1}/_{6}\ \pi R^2\right)$$

$$= \sqrt{3}\ R^2 - {}^{1}/_{2}\ \pi R^2$$

$$= \left(\sqrt{3} - {}^{1}/_{2}\ \pi\right) R^2$$

$$= (1.732050808 - 1.571428571)\ R^2$$

$$= 0.160622237\ R^2 = S\,R^2$$

حيث S هو ثابت شكشك $= 0.160622237$

وهو المطلوب إثباته

نظرية الكرة الركنية لهرم ثلاثي منتظم

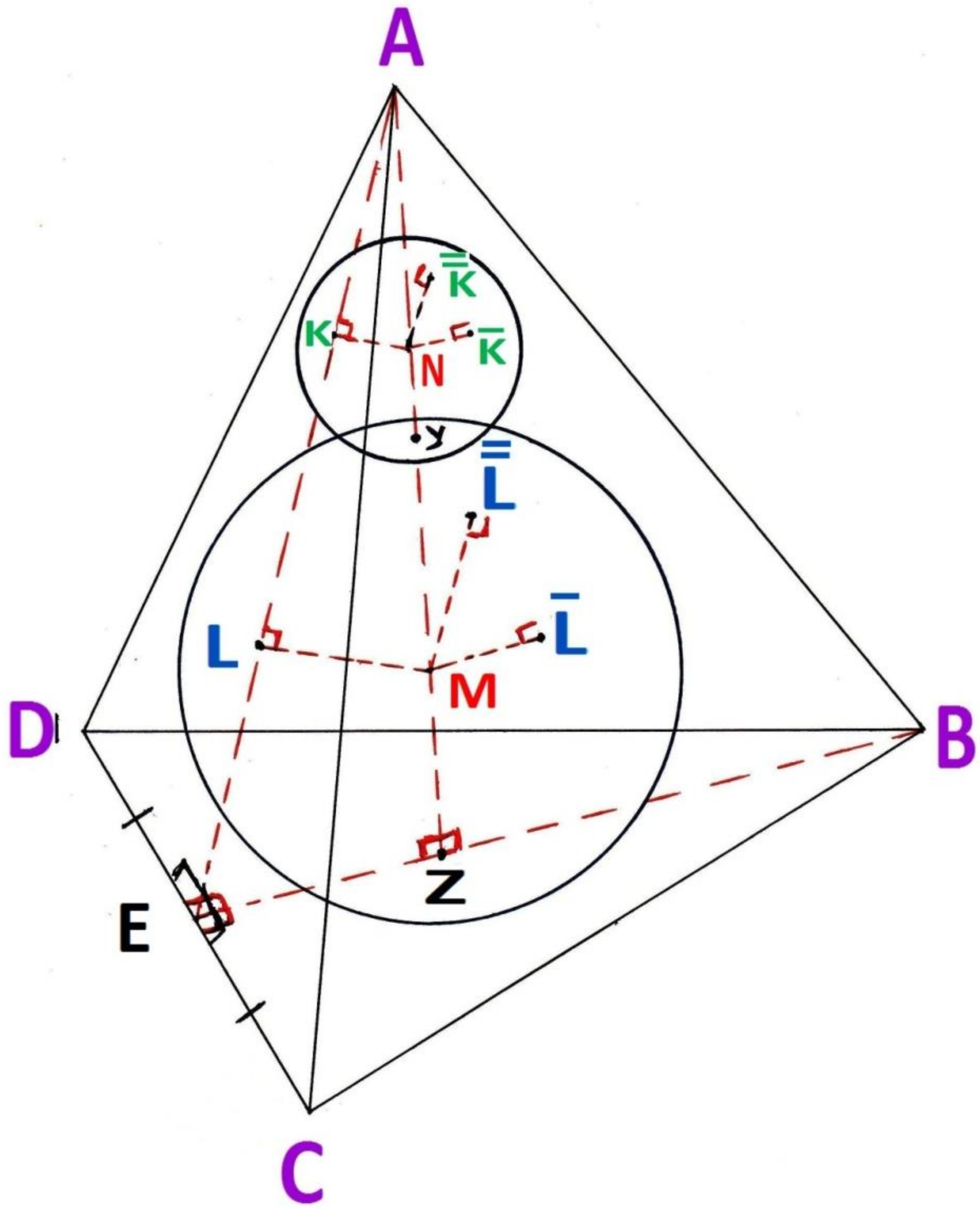
* نصف قطر الكرة الركنية لهرم ثلاثي منتظم طول حرفه **L** هو **R** حيث :

$$\boxed{R = \left(\frac{1}{12 + \sqrt{6}}\right) L}$$

* تمهيد :

- الكرة المركزية لهرم ثلاثي منتظم : هي الكرة التي يمس سطحها أوجه الهرم الأربعة ويكون مركزها هو مركز الهرم .

- الكرة الركنية لهرم ثلاثي منتظم : هي الكرة التي يمس سطحها ثلاث أوجه للهرم متقاطعة في نقطة ويمس سطح الكرة المركزية للهرم من الخارج .



*** المعطيات :**

ABCD هرم ثلاثي منتظم ، **M** كرة مركزية له تمس أوجه الأربعة في Z , L , $\bar{L}$, $\bar{\bar{L}}$. **N** كرة ركنية للهرم عند الرأس **A** وتمس ثلاثة أوجه في الهرم هو **ADC** , **ACB** , **ABD** في K , $\bar{K}$, $\bar{\bar{K}}$ علي الترتيب

كما تمس الكرة المركزية **M** في **Y** من الخارج .

* المطلوب :

إثبات أن :

$$\boxed{R = \left(\frac{1}{12+\sqrt{6}}\right) L}$$

حيث: **R** هي نصف قطر الكرة الركنية للهرم و **L** هي طول حرف الهرم .

* العمل :

- نسقط العمود **AZ** يكون عمودي على القاعدة **BCD** في **Z** .

- نصل كل من **MA** , **NA** .

- نسقط العمود **AE** علي **CD** فيقابله في **E** .

- نصل **BE** .

- نصل **M** مركز الكرة المركزية بنقاط تماس سطحها مع الأوجه **ADC** , **ACB** , **ABD** وهم L , $\bar{L}$, $\bar{\bar{L}}$ علي الترتيب .

- نصل مركز الكرة الركنية **N** بنقاط تماس سطحها مع الأوجه **ADC** , **ACB** , **ABD** وهم K , $\bar{K}$, $\bar{\bar{K}}$ علي الترتيب .

* البرهان :

- $\Delta\,\Delta\,\Delta$ ANK , $AN\bar{K}$, $AN\bar{\bar{K}}$ فيهما :

$$NK = N\bar{K} = N\bar{\bar{K}}$$

$$\angle AKN = \angle A\bar{K}N = \angle A\bar{\bar{K}}N \quad ,$$

ضلع مشترك AN ,

$\therefore$ الثلاث $\Delta\ \Delta\ \Delta$ متطابقة :

$$\therefore \quad \angle AKN = \angle A\bar{K}N = \angle A\bar{\bar{K}}N$$

$\therefore$ NA يميل علي الثلاث مستويات المتلاقية في A بنفس زاوية الميل .

- بالمثل من تطابق المثلثات AML , $AM\bar{L}$, $AM\bar{\bar{L}}$ يمكن إثبات أن AM يميل على الثلاث مستويات المتقاطعة في A بنفس زاوية الميل .

- أيضا ارتفاع الهرم الذي هو AZ يلاقي قاعدة الهرم عند نقطة تلاقي متوسطات القاعدة BCD ويكون عمودي عليها وهو يقسم أي متوسط في القاعدة بنسبة $2 : 1$ من ناحية الرأس معنى ذلك أن $\Delta\ \Delta\ \Delta$ AZB , AZC , AZD يكون فيهم

$ZB = ZC = ZD$,

$AB = AC = AD$,

AZ مشترك

$\therefore$ ينطبق المثلثات وينتج أن :

$$\angle ZAB = \angle ZAC = \angle ZAD$$

أي أن AZ يميل علي الثلاث مستويات المتقاطعة في النقطة A للهرم بنفس زاوية الميل .

$\because$ لا يوجد غير مستقيم واحد بحيث يميل علي ثلاث مستويات متقاطعة في نقطة ماراً بهذه النقطة ويميل عل كل منهم بنفس زاوية الميل .

∴ كل من AN , AM , AZ ينطبقوا علي بعض .

∴ كل من النقاط A , N , M , Z يكونوا علي استقامة واحدة .

أي أن M تنتمي إلي ارتفاع الهرم AZ . كما أنه بنفس الطريقة يمكن إثبات أن M تنتمي إلي باقي الارتفاعات .

∵ الارتفاعات للهرم الثلاثي المنتظم تتلاقي في نقطة واحدة هي مركز الهرم .

∴ M هي مركز الهرم والكرة المركزية في نفس الوقت .

∴ M تقسم أي ارتفاع للهرم بنسبة ٣ : ١ من ناحية الرأس .

– من المعلوم أن AL هو مسقط AM علي المستوى ACD و

∵ KN عمودي علي المستوى ACD وحيث N تنتمي إلي AM .

∴ K تقع علي AL .

∴ كل من $\Delta\, \Delta\, AKN$, ALM في مستوى واحد وفيهما $KN // LM$

أي أن $\Delta\, \Delta\, AKN$, ALM متشابهان .

* في المثلث $\Delta\, EBC$ نجد أن :

$$(EB)^2 = (BC)^2 - (EC)^2 = L^2 - \left(\frac{1}{2} L\right)^2$$

$$= L^2 - \frac{1}{4} L^2 = \frac{3}{4} L^2$$

$$\therefore \quad \boxed{EB = \sqrt{\frac{3}{4}}\ L}$$

$$\therefore \ BZ = \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{3}{4}}\ L = \frac{1}{\sqrt{3}}\ L$$

$$\therefore \quad \boxed{BZ = \frac{1}{\sqrt{3}} L}$$

* في Δ AZB القائم الزاوية في Z نجد أن :

$$(AZ)^2 = (AB)^2 - (BZ)^2 = L^2 - \frac{1}{4} L^2$$

$$\therefore \quad (AZ)^2 = \frac{2}{3} L^2$$

$$\therefore \quad \boxed{AZ = \sqrt{\frac{2}{3}} L \quad \text{إرتفاع الهرم}}$$

– من المعروف أنمركز الهرم الثلاثي يقسم ارتفاعه بنسبة 3 : 1 من ناحية الرأس .

$$\therefore \quad (AM) = \frac{3}{4} (AZ) = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} L$$

$$\therefore \quad \boxed{(AM) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$, \quad (MZ) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} L =$$

$$= \frac{1}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} L$$

$$\therefore \quad \boxed{(MZ) = (LM) = \frac{1}{2\sqrt{6}} L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$, \quad (AN) = AM - MY - R =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} L - MZ - R$$

$$\therefore \; AN = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} L - \frac{1}{2\sqrt{6}} L - R =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{6}} L - \frac{1}{2\sqrt{6}} L - R =$$

$$= \frac{(3-1)}{2\sqrt{6}} L - R = \frac{2}{2\sqrt{6}} L - R$$

$$\therefore \; \boxed{AN = \frac{1}{\sqrt{6}} L - R} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

* من تشابه $\Delta\,\Delta$ ANK , ALM

$$\therefore \; \frac{KN}{LM} = \frac{AN}{AM}$$

$$\therefore \; \frac{R}{\frac{L}{2\sqrt{6}}} = \frac{\frac{L - \sqrt{6}\,R}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{3}\,L}{2\sqrt{2}}}$$

$$\therefore \; \frac{2\sqrt{6}\,R}{L} = \frac{2\sqrt{2}\,L - 4\sqrt{3}\,R}{4\sqrt{3}\,L}$$

بضرب طرفي المعادلة في L واختصار الطرف الأيمن ينتج أن :

$$2\sqrt{6}\,R = \frac{\sqrt{2}\,L - 2\sqrt{3}\,R}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,L}{2\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}\,R}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{6}\ R = \frac{1}{\sqrt{6}}\ L - R$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{6}\ R + R = \frac{1}{\sqrt{6}}\ L$$

$$\therefore \quad \left(2\sqrt{6} + 1\right) R = \frac{L}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \quad R = \frac{L}{\sqrt{6}\left(2\sqrt{6} + 1\right)} = \frac{L}{12 + \sqrt{6}}$$

$$\therefore \quad \boxed{R = \left(\frac{1}{12 + \sqrt{6}}\right) L}$$

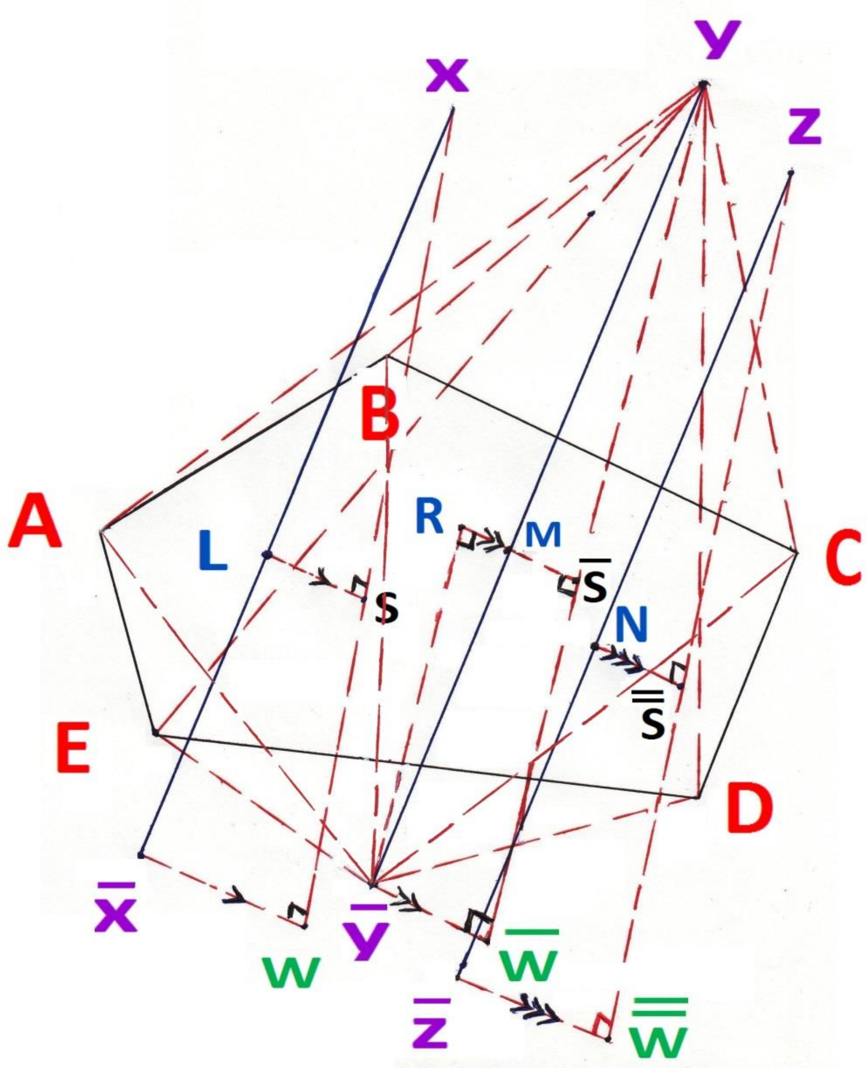
وهو المطلوب إثباته

نظرية المجسمات المتكافئة

* جميع القطع المستقيمة المتساوية في الطول والميل والقاطعة لقطعة مستوية تكون أطرافها مع محيط القطعة المستوية مجسمات متكافئة .

* بصيغة أخرى :

القطعة المستقيمة ذات الميل الثابت والقاطعة لقطعة مستوية تكون أطرافها مع محيط القطعة المستوية مجسم ثابت الحجم لأي نقطة تقاطع علي القطعة المستقيمة أو علي القطعة المستوية .



* المعطيات :

$X\bar{X}$, $Y\bar{Y}$, $Z\bar{Z}$ ثلاث قطع مستقيمة متساوية الطول والميل علي القطعة المستوية ABCDE ويقطعوها في L , M , N علي الترتيب .

* المطلوب :

إثبات أن المجسمات الثلاثة الناتجة من كل طرفي قطعة مستقيمة ورؤوس القطعة المستوية A B C D E تكون جميعها متكافئة في الحجم .

* العمل :

– نسقط العمود X S علي القطعة المستوية ليلاقيها في S ثم نمده علي استقامته .

– نسقط العمود $Y\bar{S}$ علي القطعة المستوية ليلاقيها في $\bar{S}$ ثم نمده علي استقامته .

– نسقط العمود $Z\bar{\bar{S}}$ علي القطعة المستوية ليلاقيها في $\bar{\bar{S}}$ ثم نمده علي استقامته .

– نرسم من $\bar{X}$ المستقيم $\bar{X}W$ يوازي LS ويلاقي امتداد SX في W .

– نرسم من $\bar{Y}$ المستقيم $\bar{Y}\bar{W}$ يوازي $M\bar{S}$ ويلاقي امتداد $\bar{S}Y$ في $\bar{W}$.

– نرسم من $\bar{Z}$ المستقيم $\bar{Z}\bar{\bar{W}}$ يوازي $N\bar{\bar{S}}$ ويلاقي امتداد $\bar{\bar{S}}Z$ في $\bar{\bar{W}}$.

– نسقط العمودان $\bar{S}Y$, $R\bar{Y}$ على القطعة المستوية فيكون $R\bar{S}$ هو مسقط $Y\bar{Y}$ علي القاعدة المستوية ويمر بنقطة التقاطع M .

* البرهان :

– $Y\bar{S}$ هو ارتفاع الهرم $Y.ABCDE$ ،

$\bar{Y}R$ هو ارتفاع الهرم $\bar{Y}.ABCDE$.

∴ حجم الهرم $Y.ABCDE = \frac{1}{3}(ABCDE)\ Y\bar{S}$

، حجم الهرم $\bar{Y}.ABCDE = \frac{1}{3}(ABCDE)\ \bar{Y}R$

∴ حجم المجسم $Y.ABCDE.\bar{Y} =$

$$= \frac{1}{3}\left(Y\bar{S} + \bar{Y}R\right)\ (ABCDE) \qquad \dots\dots\dots\dots(1)$$

* ∵ $R\bar{S}, Y\bar{Y}$ مستقيمان متقاطعان

∴ يمر بهما مستوى واحد وتكون $\bar{S}Y$ تقع في نفس المستوى

∴ $\bar{W}\bar{S}$ تقع في نفس المستوى أي أن كل من النقاط $R, \bar{S}, \bar{W}, \bar{Y}$ تقع جميعاً في مستوى واحد .

ولكن كل من $R\bar{Y}$, $\overline{SW}$ عمودين على المستوى $A\ B\ C\ D\ E$.

∴ $\overline{SW} // R\bar{Y}$

But , $R\bar{S} // \bar{Y}\bar{W}$ معطي

∴ الشكل $R\ \bar{S}\ \bar{W}\ \bar{Y}$ متوازي أضلاع

∴ $R\bar{Y} = \overline{SW}$

بالتعويض في معادلة (1) يكون :

حجم المجسم $Y.ABCDE.\bar{Y} = \frac{1}{3}\ (ABCDE)\ Y\bar{W}$

بنفس الطريقة السابقة يمكن إثبات أن :

حجم المجسم $X.ABCDE.\bar{X} = \frac{1}{3}\ (ABCDE)\ XW$

، حجم المجسم $Z.ABCDE.\bar{Z} = \frac{1}{3}\ (ABCDE)\ Z\bar{\bar{W}}$

$* \ \angle ZN\bar{\bar{S}} = \angle XLS = \angle YM\bar{S}$

زوايا ميل متساوية

ولكن $Z\bar{\bar{W}} // N\bar{\bar{S}} \ , \ \bar{Y}\bar{W} // R\bar{S} \ , \ \bar{X}W // LS$

$\therefore \ \angle W\bar{X}L = \angle \bar{W}\bar{Y}M = \angle \bar{\bar{W}}\bar{Z}N$

∴ في المثلثات $Z\bar{Z}\bar{\bar{W}} \ , \ Y\bar{Y}\bar{W} \ , \ X\bar{X}W$

فيهم الثلاث زوايا المتناظرة متساوية

أيضا فيهم $X\bar{X} = Y\bar{Y} = Z\bar{Z}$

∴ ينطبق الثلاث مثلثات وينتج أن :

$XW = Y\bar{W} = Z\bar{\bar{W}}$

∴ حجم المجسم $X.ABCDE.\bar{X} =$

حجم المجسم $Y.ABCDE.\bar{Y} =$

حجم المجسم $Z.ABCDE.\bar{Z}$

وهو المطلوب إثباته

نظرية كور المستويات المتعامدة

* إذا تعامد وتقاطع ثلاث مستويات في نقطة فإن جميع الكور المتماسة مثنى مثنى من الخارج بحيث كل كرة يمس سطحها المستويات الثلاث المتعامدة وفي نفس الوقت تمس سطحي الكرتين السابقة والتالية لها. فإذا افترضنا الكرة الأساسية M ونصف قطرها R فإن :

$$R_{-n} = R\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^{n}$$

$$R_{n} = R\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^{n}$$

حيث :

R_n هي نصف قطر الكرة رقم n في الاتجاه المعاكس لاتجاه نقطة تقاطع المستويات .

، R_{-n} هو نصف قطر الكرة رقم $-n$ أي في اتجاه نقطة تقاطع الثلاث مستويات.

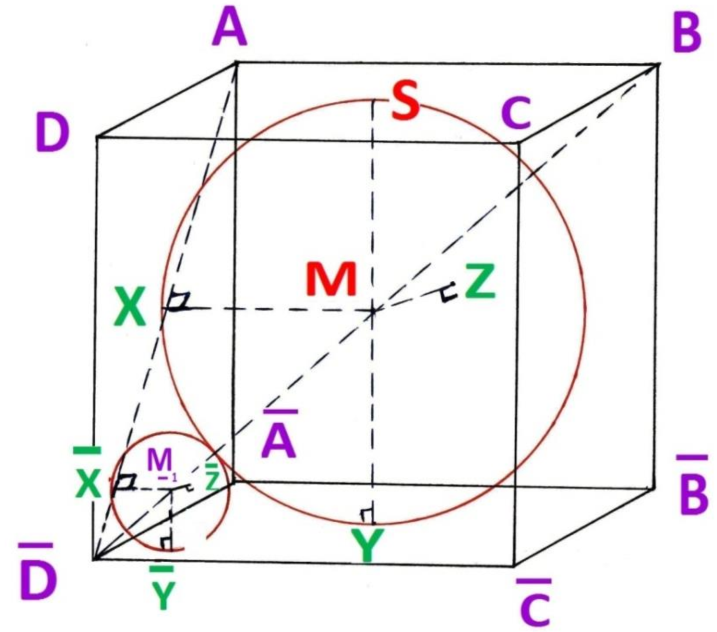


Fig (A)

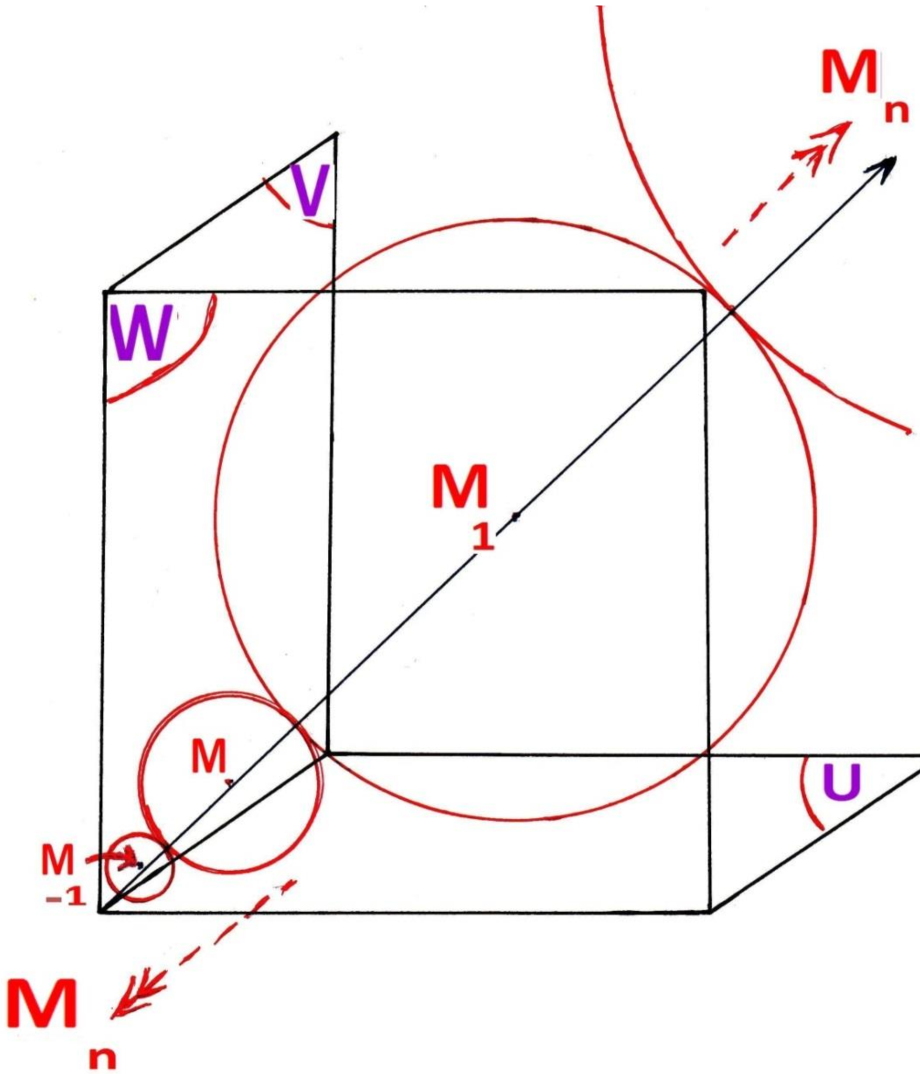


Fig (B)

خط شكشك للكور المتتاليـة

Fig (C)

في **Fig (B)** , **Fig (C)** توضح أن :

M الكرة باعتبارها الأساسية .

M_1 الكرة الأولي في السلسلة التصاعدية .

M_2 الكرة الثانية في السلسلة التصاعدية .

M_3 الكرة رقم **n** في السلسلة لتصاعدية .

M_{-1} الكرة الأولي في السلسلة التنازلية .

M_{-2} الكرة الثانية في السلسلة التنازلية .

M_{-n} الكرة رقم **n** في السلسلة التنازلية .

R نصف قطر الكرة الأساسية **M** .

R_1 نصف قطر الكرة الأولي التصاعدية .

R_2 نصف قطر الكرة الثانية التصاعدية .

R_n نصف قطر الكرة رقم **n** التصاعدية .

R_{-1} نصف قطر الكرة الأولي التنازلية .

R_{-2} نصف قطر الكرة الثانية التنازلية .

R_{-n} نصف قطر الكرة رقم **N** التنازلية .

n هو رقم تسلسل الكرة التصاعدي أو التنازلي ما بعد الكرة الأساسية .

في Flg (C) هو عبارة عن خط شكشك لكور المستويات المتقاطعة وهو خط توضيحي للكور المتماسة وأنصاف أقطارها .

* توضيح :

- إذا تقاطع ثلاث مستويات في نقطة فإنه :

١- لا يوجد غير مستقيم واحد ماراً بهذه النقطة بحيث يصنع من الثلاث مستويات نفس زاوية الميل (في حالة المستويات المتعامدة الميل $= \frac{1}{\sqrt{2}}$)

٢- لا يوجد غير مستقيم واحد ماراً بهذه النقطة بحيث يصنع مع خطوط تقاطع المستويات نفس زوايا الميل (في حالة المستويات المتعامدة الميل $= \frac{\sqrt{2}}{1}$)

.

- إذا قطع مستقيم مستوى فإن جميع الأعمدة الساقطة من نقاط تنتمي إلي المستقيم علي المستوى، تقع جميعها عي مسقط المستقيم علي المستوى .

- كرة المكعب هي الكرة الداخلية للمكعب بحيث يمس سطحها جميع أوجه المكعب

.

- كرة المكعب يمس سطحها جميع أوجه المكعب في مراكز الأوجه .

- الكرة الركنية لمكعب: هي كرة في ركن المكعب بحيث يمس سطح الكرة من الخارج محيط كرة المكعب وفي نفس الوقت يمس ثلاث أوجه متقاطعة من المكعب في نقطة واحدة .

* المعطيات :

في Fig (A) :

$A\,B\,C\,D\,\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ مكعب طول ضلعه L . M هي الكرة الداخلية للمكعب نصف قطرها $= R$ وتمس وجه المكعب $A\,B\,C\,D$ في S والوجه $A\,D\,\bar{D}\,\bar{A}$ في X ، الكرة M_{-1} هي الكرة الركنية للمكعب بحيث تمس الوجه $A\,D\,\bar{D}\,\bar{A}$ في $\bar{X}$ والوجه $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ في $\bar{Y}$ ونصف قطرها هو R_{-1} .

في Fig (B) :

U , V , W ثلاث مستويات متعامدة علي بعض ومتقاطعة في النقطة O ، M_n ، .... ، M_2 ، M_1 ، M ، M_{-1} ، M_{-2} ، .... ، M_{-n} هم مجموعة من الكور المتماسة مثنى مثنى من الخارج ويمس كل منهم الثلاث مستويات حيث أن الكرة الأساسية فيهم هي M وأنصاف أقطار الكور هي R_n ، .... ، R_2 ، R_1 ، R ، R_{-1} ، R_{-2} ، .... ، R_{-n} .

- في Fig (C) :

هو شكل توضيحي يوضح تسلسل الكرة المتماسة بالنسبة للكرة الأساسية M حيث للكور M_1 , M_2 , ... , M_n تمثل السلسلة التصاعدية الذي يزيد فيها أحجام الكور M_{-1} , M_{-2} , ... , M_{-n} تمثل السلسلة التنازلية التي تقل فيها أحجام الكور المتجهة نحو نقطة تقاطع الثلاث مستويات .

* المطلوب : إثبات أن :

$$R_{-n} = R\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^{n}$$

$$R_{n} = R\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^{n}$$

*** العمل :**

- نصل كل من :

$\mathbf{M_{-1}\bar{D}}$, $\mathbf{M\bar{D}}$, $\mathbf{B\bar{D}}$, $\mathbf{MX}$, $\mathbf{MY}$, $\mathbf{MZ}$

$\mathbf{\bar{M}\bar{X}}$, $\mathbf{\bar{M}\ \bar{Y}}$, $\mathbf{\bar{M}\bar{Z}}$, $\mathbf{\bar{D}\bar{X}}$, $\mathbf{\bar{D}\bar{Y}}$, $\mathbf{\bar{D}\bar{Z}}$,
$\mathbf{\bar{D}X}$

* البرهان :

أولاً : نوجد نصف قطر الكرة الركنية M_{-1} وهو R_{-1} كالآتي :

بالنظر في Fig (A) نجد أن :

- المستقيم $B\bar{D}$ قطر في المكعب ونجد أنه يميل علي الوجه $A\,\bar{A}\,\bar{D}\,D$ بزاوية θ حيث :

$$\tan\theta = \frac{AB}{\bar{D}A} = \frac{L}{\sqrt{2}\,L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

بالمثل يمكن إثبات أن $B\bar{D}$ يميل علي الوجهين $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ ، $C\,\bar{C}\,\bar{D}\,D$ بنفس زاوية الميل .

- أيضاً $\bar{D}M$ يميل علي الوجه $D\,\bar{D}\,\bar{A}\,A$ بزاوية بحيث ظلها يساوى

$$\text{الظل} = \frac{MX}{\bar{D}X} = \frac{0.5\,L}{0.5\,\sqrt{2}\,L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن $\bar{D}M$ يميل علي كل من الوجهين $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ ، $C\,\bar{C}\,\bar{D}\,D$ بنفس زاوية الميل الذي ظلها $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ كل من $\bar{D}M$, $\bar{D}B$ ينطبقان علي بعض .

$\therefore$ مركز كرة المكعب M يقع علي قطر المكعب $\bar{D}B$ ويكون مركز الكرة M هو نفسه مركز المكعب .

- أيضاً $\bar{D}M_{-1}$ يميل علي الوجه $D\,\bar{D}\,\bar{A}\,A$ بزاوية ظلها $= \frac{\bar{X}M_{-1}}{\bar{X}\bar{D}}$

- أيضاً $\bar{D}M_{-1}$ يميل علي الوجه $\bar{D}\,\bar{C}\,\bar{B}\,\bar{A}$ بزاوية ظلها $= \frac{\bar{Y}M_{-1}}{\bar{Y}D}$

- أيضاً $\bar{D}M_{-1}$ يميل علي الوجه $C\,\bar{C}\,\bar{D}\,D$ بزاوية ظلها $= \frac{\bar{Z}M_{-1}}{\bar{Z}D}$

ولكن :

$$\bar{X}M_{-1} = \bar{Y}M_{-1} = \bar{Z}M_{-1}$$

أنصاف أقطار الكرة الركنية M_{-1} ، أيضا $\bar{Z}\bar{D} = \bar{Y}\bar{D} = \bar{X}\bar{D}$ مماسات للكرة الركنية M_{-1} من نقطة واحدة .

∴ زوايا ميل $\bar{D}M_{-1}$ على الثلاث أوجه متساوية .

∴ $\bar{D}M_{-1}$ ينطبق أيضا علي القطر $\bar{D}B$.

∴ كل من النقاط $\bar{D}$, M_{-1} , M , B تقع علي استقامة واحدة .

* بنفس الطريقة يمكن إثبات أن جميع مراكز الكور الركنية إلي M_{-n} تقع علي استقامة واجدة مع مركز كرة المكعب التي هي مركز المكعب .

* $AB \perp$ المستوى $A\,\bar{A}\,\bar{D}\,D$

∴ مسقط القطر $B\bar{D}$ علي الوجه $A\,\bar{A}\,\bar{D}\,D$ هو المستقيم $A\bar{D}$.

∴ النقاط B , M , M_{-1} يكون الأعمدة الساقطة منها علي المستوى $A\,\bar{A}\,\bar{D}\,D$ تقع مساقطها علي المستقيم $A\bar{B}$.

∴ كل من النقاط A , X , $\bar{X}$, $\bar{D}$ تكون علي استقامة واحدة .

$$BA = L$$

$$XM = {}^{1}\!/_{2}\ L$$

$$\bar{D}A = \sqrt{2}\ L \qquad \text{(قطر وجه في مكعب)}$$

$$\bar{D}B = \sqrt{3}\ L \qquad \text{(قطر مكعب)}$$

* في المثلثان $\bar{D}BA$, $\bar{D}M_{-1}\bar{X}$ فيهما :

$$\angle \bar{D}AB = \angle \bar{D}\bar{X}M_{-1} = 90^o$$

كما أن $\angle B\bar{D}A$ مشتركة

$\therefore$ الثلاث زوايا في المثلثان متساوية.

$\therefore$ المثلثان متشابهان.

$$\therefore \quad \frac{M_{-1}\bar{X}}{AB} = \frac{M_{-1}\bar{D}}{B\bar{D}}$$

$$\therefore \quad \frac{R_{-1}}{L} = \frac{B\bar{D} - \left(1/2\ B\bar{D} + 1/2\ L + R_{-1}\right)}{B\bar{D}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\ L - \frac{\sqrt{3}\ L}{2} - 1/2\ L - R_{-1}}{\sqrt{3}\ L}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{3}\,L - \sqrt{3}\,L - L - 2\,R_{-1}}{2}}{\sqrt{3}\,L}$$

$$\therefore \quad \frac{R_{-1}}{L} = \frac{\sqrt{3}\ L - L - 2\ R_{-1}}{2\sqrt{3}\ L}$$

بضرب طرفي المعادلة في L يكون :

$$\therefore \quad R_{-1} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)\ L - 2\,R_{-1}}{2\,\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{3}\ R_{-1} = \left(\sqrt{3} - 1\right)\ L - 2R_{-1}$$

$$\therefore \quad 2\sqrt{3}\ R_{-1} + 2\,R_{-1} = \left(\sqrt{3} - 1\right)\ L$$

$$\therefore \quad 2\,R_{-1}\left(\sqrt{3}+1\right) = \left(\sqrt{3}-1\right) L$$

$$\therefore \quad \boxed{R_{-1} = {}^{1}\!/_{2}\; L \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)}$$ هذا للمكعب

ولكن $$R = {}^{1}\!/_{2}\; L$$

$$\therefore \quad \boxed{R_{-1} = R\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

* وكما رئيتا في الكرة المركزية M و الكرة الركنية M_{-1} للمكعب فإن الكرة M_{-2} هي تعتبر كرة ركنية للكرة M_{-1} وبناء عليه .

$$\therefore \quad R_{-2} = R_{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) =$$

$$= \quad R\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{R_{-2} = R\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{R_{-n} = R\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^{n}} \qquad (A)$$

* أيضاً الكرة الأساسية M تعتبر كرة ركنية بالنسبة للكرة M_1 كما هو واضح في Fig (B)

∴ بتطبيق القانون كما في المعادلة (1) نجد أن :

$$\therefore \quad R = R_1 \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \right)$$

$$\therefore \quad R_1 = R \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) \qquad \dots\dots\dots (3)$$

بالمثل M_1 تعتبر كرة ركنية للكرة M_2 .

$$\therefore \quad R_2 = R_1 \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) =$$

$$= R \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)$$

$$\therefore \quad R_2 = R \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)^2 \qquad \dots\dots\dots (4)$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{R_n = R \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)^n}$$

وهو المطلوب إثباته ثانيا

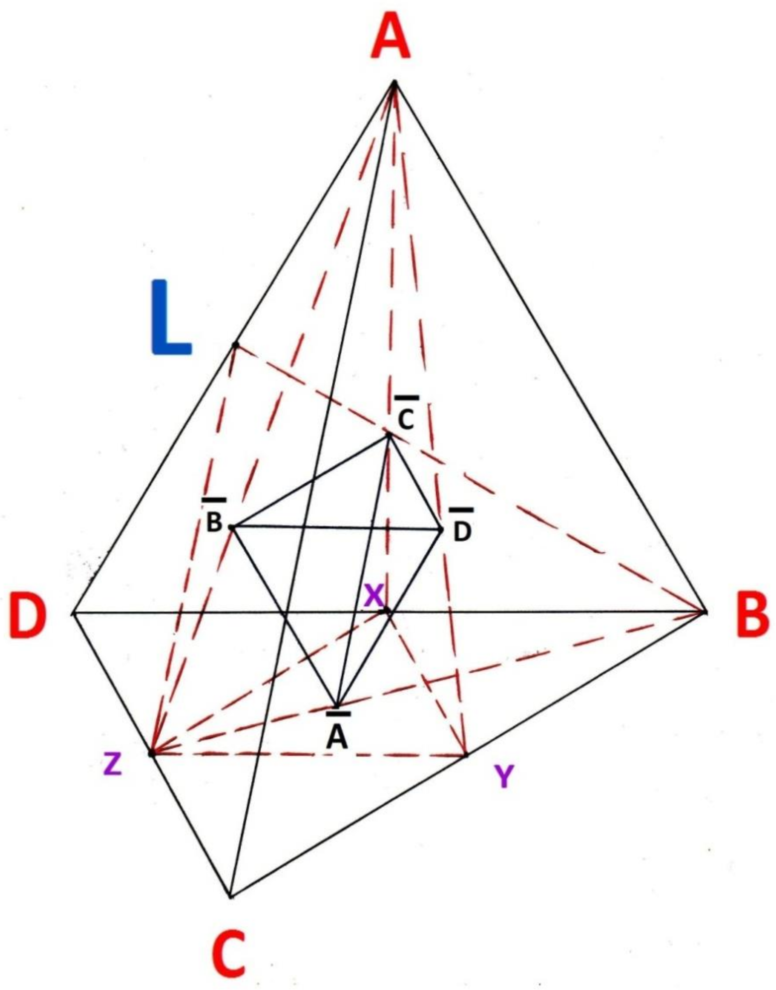
نظرية تشابه الأهرامات

* (في أي هرم ثلاثي منتظم أو غير منتظم، إذا وصلت نقاط تقاطع متوسطات أوجهه ينتج هرم يشابه الهرم الأصلي ويساوى $\frac{1}{27}$ من حجم الهرم الأصلي)

* تعريفات :

– لأي هرمين هندسيين منتظمين أو غير منتظمين، إذا تناسبت أحرف الهرم الأول مع الأحرف المناظرة لها في الهرم الآخر، كان الهرمان متشابهان.

– في أي شكلين فراغين (مجسمين) متشابهان لهما حرفان متناظران $\mathbf{L}$, $\bar{\mathbf{L}}$ يكون النسبة بين حجميهما كالنسبة بين مكعبي حرفيهما $\frac{\mathbf{L}^3}{\bar{\mathbf{L}}^3}$.



*** المعطيات :**

A B C D هرم ثلاثي ، **$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$** هرم ثلاثي ناتج من توصيل نقاط تقاطع متوسطات أوجه الهرم الثلاثي **A B C D** .

*** المطلوب :**

إثبات أن الهرم **A B C D** يشابه الهرم **$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$** ويساوى **27** ضعف منه .

*** العمل :**

نرسم المتوسطات AZ , AY , AX

ثم نصل XY , YZ , XZ

ثم نصل BZ , CX , DY

* البرهان :

في المثلثات ABC , ACD , ADB فيهم كل من AY , AZ , AX متوسطات علي الترتيب وأن كل من النقاط $\bar{D}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ هي نقاط تقاطع المتوسطات فهي تقسم كل من AY , AZ , AX علي الترتيب بنسبة 2 : 1 من جهة الرأس A .

في المثلثات AXY , AYZ , AZX نجد أن كل من $\bar{B}\bar{C}$, $\bar{C}\bar{D}$, $\bar{D}\bar{B}$ علي الترتيب كل منهم تقسم ضلعي المثلثات AXY , AYZ , AZX علي الترتيب بنسبة واحدة هي 2 : 1

$$\therefore \quad \overline{CD} \,//\, XY$$

$$, \quad \overline{DB} \,//\, ZY$$

$$, \quad \overline{BC} \,//\, ZX$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{CD}}{XY} = \frac{\overline{AD}}{AY} \quad , \quad \frac{\overline{DB}}{ZY} = \frac{\overline{AD}}{AY} \quad , \quad \frac{\overline{BC}}{ZX} = \frac{\overline{AC}}{AX}$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{CD}}{XY} = \frac{\overline{DB}}{ZY} = \frac{\overline{BC}}{ZX} = \frac{2}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ولكن كل من النقطتين Y و X واصلين بين منتصفي ضلعي المثلث BCD

$$\therefore \quad XY = \frac{1}{2}\ DC$$

$$\text{Also} \quad YZ = \frac{1}{2}\ BD \quad , \quad ZX = \frac{1}{2}\ BC$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{CD}}{CD} = \frac{\overline{BD}}{BD} = \frac{\overline{BC}}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

وبالمثل في $\Delta\, BZL$ يكون :

$$\frac{\overline{CA}}{LZ} = \frac{\overline{BA}}{BZ} = \frac{2}{3}$$

ولكن في المثلث ACD يكون LZ واصل بين منتصفي الضلعين DA , DC

$$\therefore \quad LZ = {}^{1}\!/_{2}\ AC \quad \Longrightarrow \quad \frac{\overline{CA}}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Also} \quad \frac{\overline{AD}}{AD} = \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$\text{i.e} \quad \frac{\overline{AC}}{AC} = \frac{\overline{AD}}{AD} = \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

From (2) , (3)

$$\therefore \quad \frac{\bar{C}\bar{D}}{CD} = \frac{\bar{B}\bar{D}}{BD} = \frac{\bar{B}\bar{C}}{BC} = \frac{\bar{A}\bar{C}}{AC} = \frac{\bar{A}\bar{D}}{AD} = \frac{\bar{A}\bar{B}}{AB} = \frac{1}{3}$$

أي أن أضلاع كل من الهرمين $A\,B\,C\,D$, $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ متناسبة .

$\therefore$ الهرمان متشابهان

وهو المطلوب أولاً

وبما أن من النسبة واضح أن الهرم الأكبر طول ضلعه = ٣ أضعاف الهرم الأصغر وأيضاً من مبدأ أن النسبة بين حجمي مجسمين متشابهين كالنسبة بين مكعبي أحد أحرفهما في أحدهما مع نظيره في الآخر.

$\therefore$ حجم الهرم $A\,B\,C\,D$ = 27 ضعف حجم الهرم $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$

وهو المطلوب ثانياً

حقائق

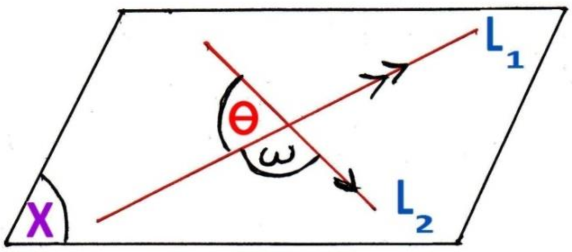
* إذا تقاطع ثلاث مستويات في نقطة فإنه لا يوجد غير مستقيم واحد فقط ماراً بهذه النقطة بحيث يميل علي كل من المستويات الثلاثة بنفس زاوية الميل .

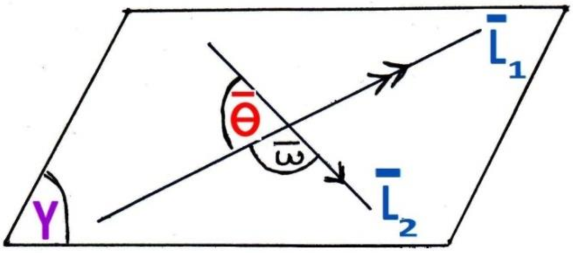
* إذا تقاطع ثلاث مستويات في نقطة فإنه لا يوجد غير مستقيم واحد بحيث يميل علي الثلاث مستويات بنفس زوايا الميل ماراً بهذه النقطة .

* إذا تقاطع ثلاث مستقيمات في نقطة فإنه لا يوجد غير مستقيم واحد بحيث يميل علي الثلاث مستقيمات ماراً بهذه النقطة بنفس زوايا الميل .

* إذا تقاطع ثلاث مستقيمات في نقطة فإنه لا يوجد غير مستقيم واحد يمر بهذه النقطة بحيث يميل عليهم بنفس زوايا الميل .

* إذا توازى مستقيمان متقاطعان في مستوى مستقيمان متقاطعان في مستوى آخر موازي للأول، كانت زاويتا التقاطع للمستقيمان في المستوى الأول مساويتان لزاويتا التقاطع المتناظرتان للمستقيمان في المستوى الثاني .





* توضيح:

* Y , X مستويان متوازيان ، L_2 , L_1 مستقيمان متقاطعان في المستوى X . $\bar{L}_2$, $\bar{L}_1$ مستقيمان متوازيان في المستوى Y .

وكانت زاويتا التقاطع للمستقيمان L_2 , L_1 هما ω , θ وكانت زاويتا التقاطع للمستقيمان $\bar{L}_2$, $\bar{L}_1$ هما $\overline{\omega}$, $\bar{\theta}$ مع العلم أن

$L_1 // \bar{L}_1$, $L_2 // \bar{L}_2$

عندئذ يكون :

$$\theta = \bar{\theta} \quad , \quad \omega = \overline{\omega}$$

نظرية أشعة المستويات المتوازية

* (إذا خرجت من نقطة في الفراغ عدة أشعة بحيث تقطع عدة مستويات متوازية فإن نقاط تقاطع الأشعة من كل مستوى تنشأ أشكال هندسية مستوية متشابهة، وفي حالة تكون الأشكال الهندسية المستوية المنتظمة المتكونة فيكون تقع مراكزها جميعاً علي استقامة واحدة ، وفي حالة تكون مثلثات عموماً فإن نقاط تقاطع متوسطاتها تقع جميعاً علي استقامة واحدة تمر بنقطة انطلاق الأشعة) .

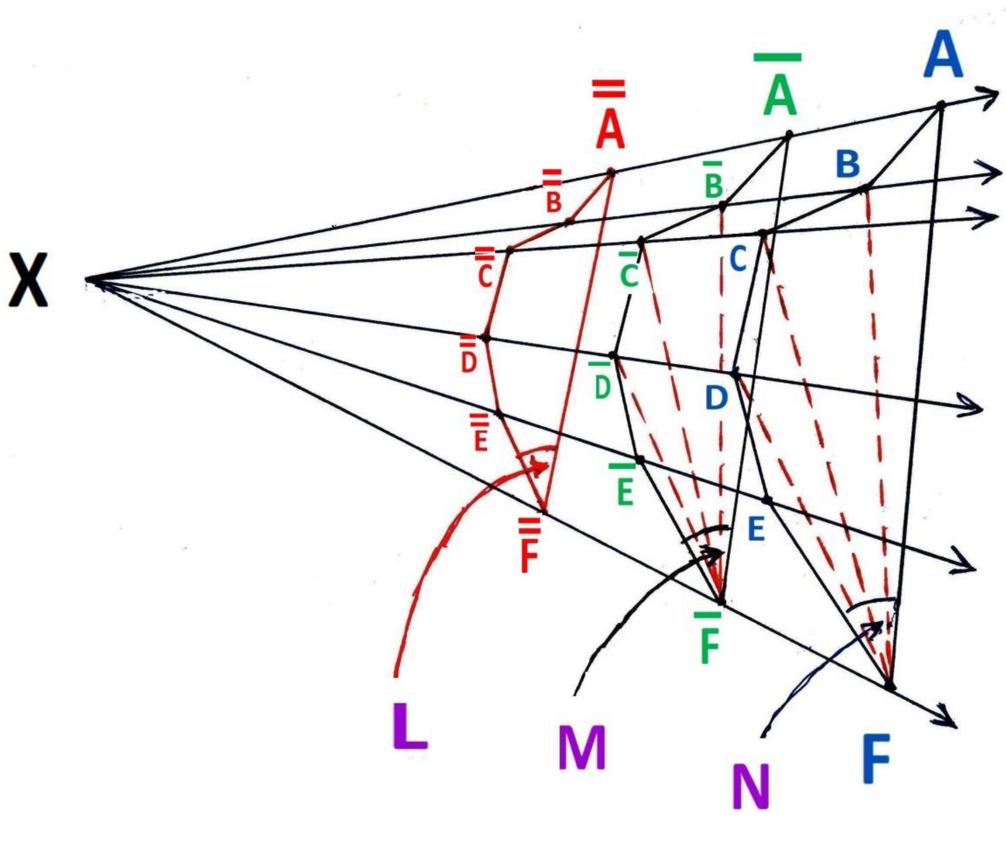
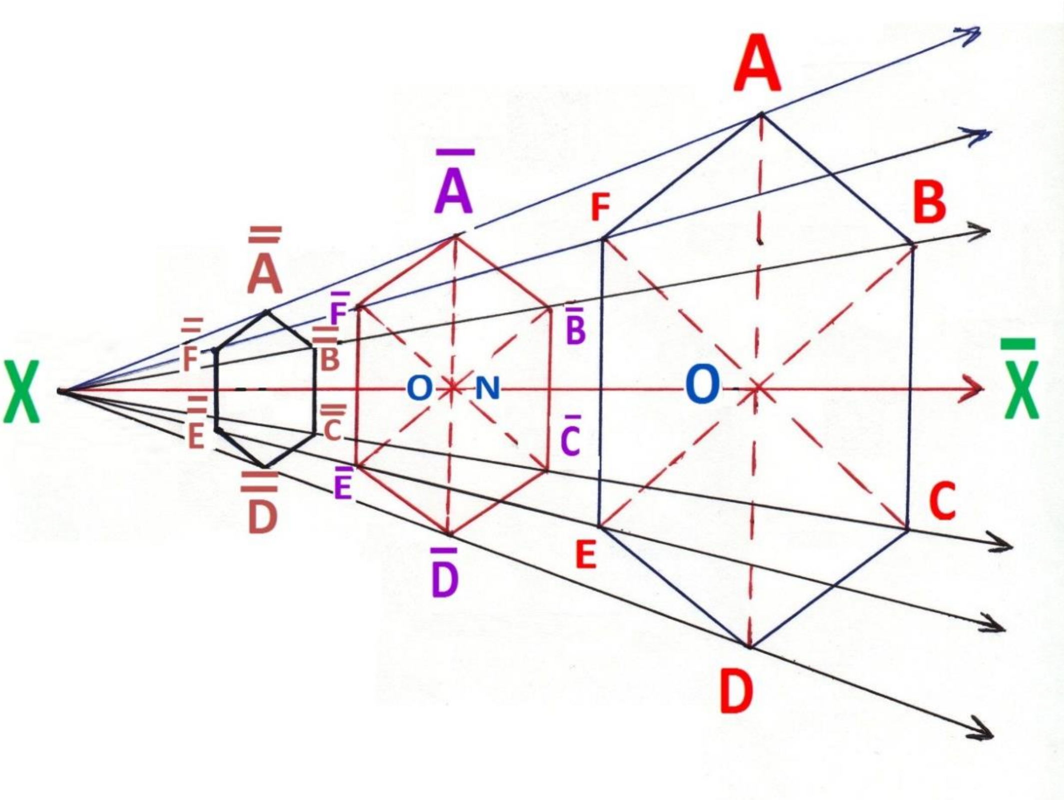


Fig (A)



X
$\bar{X}$
A
B
C
D
E
F
O
$\bar{A}$
$\bar{B}$
$\bar{C}$
$\bar{D}$
$\bar{E}$
$\bar{F}$
O
N
$\bar{\bar{A}}$
$\bar{\bar{B}}$
$\bar{\bar{C}}$
$\bar{\bar{D}}$
$\bar{\bar{E}}$
$\bar{\bar{F}}$

Fig (B)

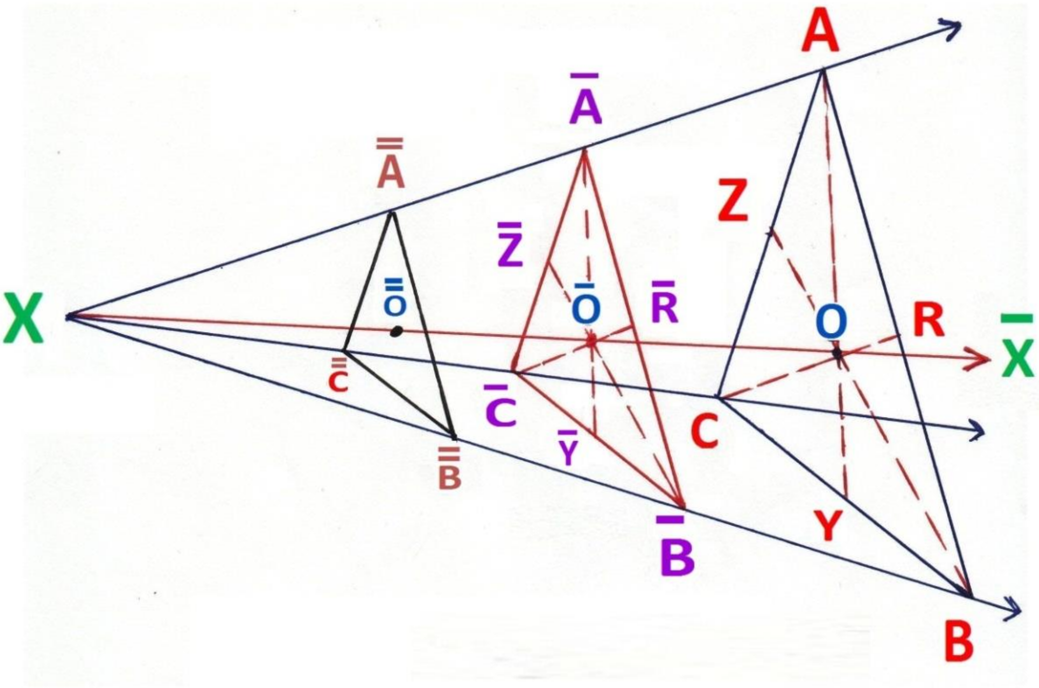


Fig (C)

* المعطيات :

– في Fig (A) L , M , N ثلاث مستويات متوازية ، X نقطة في الفراغ خرجت الأشعة $\overrightarrow{XF} , \overrightarrow{XE} , \overrightarrow{XD} , \overrightarrow{XC} , \overrightarrow{XB} , \overrightarrow{XA}$ بحث تقطع الثلاث مستويات فقطعت المستوى L في النقاط $\bar{\bar{F}} , \bar{\bar{E}} , \bar{\bar{D}} , \bar{\bar{C}} , \bar{\bar{B}} , \bar{\bar{A}}$ ثم قطعت المستوى M في النقاط $\bar{F} , \bar{E} , \bar{D} , \bar{C} , \bar{B} , \bar{A}$ ثم قطعت المستوى N في النقاط F , E , D , C , B , A .

– في Fig (B) L و M و N ثلاث مستويات متوازية ، X نقطة في الفراغ خرجت منها الأشعة $\overrightarrow{XF} , \overrightarrow{XE} , \overrightarrow{XD} , \overrightarrow{XC} , \overrightarrow{XB} , \overrightarrow{XA}$ فقطعت المستوى L في النقاط $\bar{\bar{F}} , \bar{\bar{E}} , \bar{\bar{D}} , \bar{\bar{C}} , \bar{\bar{B}} , \bar{\bar{A}}$ ثم قطعت المستوى M في النقاط $\bar{F} , \bar{E} , \bar{D} , \bar{C} , \bar{B} , \bar{A}$ علي الترتيب ثم قطعت المستوى N في النقاط

A , B , C , D , E , F علي الترتيب . كما أن كل من $\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{E}}\,\bar{\bar{F}}$, $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$, $A\,B\,C\,D\,E\,F$ عبارة عن مضلعات سداسية منتظمة .

OX مستقيم واصل بين النقطة X ومركز السداسي $A\,B\,C\,D\,E\,F$ وهو النقطة O ويقع علي الشعاع $\overrightarrow{X\bar{\bar{X}}}$.

- في Fig (C) L , M , N ثلاث مستويات متوازية ، X نقطة في الفراغ خرجت منها الأشعة $\overrightarrow{XA} , \overrightarrow{XB} , \overrightarrow{XC}$ فقطعت المستوى L في النقاط $\bar{\bar{A}} , \bar{\bar{B}} , \bar{\bar{C}}$ ثم قطعت المستوى M في النقاط $\bar{A} , \bar{B} , \bar{C}$ ثم قطعت المستوى N في النقاط A , B , C فتكونت ثلاث مثلثات متوازية في الثلاث مستويات هم $\triangle \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}$, $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $\triangle ABC$ ثم خرج الشعاع $\overrightarrow{X\bar{\bar{X}}}$ ماراً بمركز المثلث $\triangle ABC$ وهو المركز O .

كما أن الشعاع $\overrightarrow{X\bar{\bar{X}}}$ قطع المستوى L في النقطة $\bar{\bar{O}}$ وقطع المستوى M في النقطة $\bar{O}$

* المطلوب :

إثبات أن :

- في Fig (A) إثبات أن كل من الأشكال $A\,B\,C\,D\,E\,F$ و $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$ و $\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{E}}\,\bar{\bar{F}}$ متشابهة .

- وفي Fig (B) إثبات أن مراكز كل من الاشكال السداسية المنتظمة وهي $A\,B\,C\,D\,E\,F$ و $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$ و $\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{E}}\,\bar{\bar{F}}$ *تقع علي استقامة* واحدة

.

– وفي Fig (C) إثبات أن نقاط تقاطع متوسطات المثلثات A B C , $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$, $\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{C}}$ تقع جميعها علي استقامة واحدة.

* العمل :

– في Fig (A) نصل كل من DF , CF , BF و $\bar{D}\bar{F}$, $\bar{C}\bar{F}$, $\bar{B}\bar{F}$.

– في Fig (B) نصل كل من CF , BE , AD و $\bar{C}\bar{F}$, $\bar{B}\bar{E}$, $\bar{A}\bar{D}$ فتتلاقي في $\bar{O}$.

– في Fig (C) نصل كل من BO ونمده حتى يلاقي AC في Z ثم تصل AO ونمده حتى يلاقي BC في Y ونصل CO ونمده ليلاقي AB في R ثم نصل $\bar{B}\bar{O}$ ونمده حتى يلاقي $\bar{A}\bar{C}$ في $\bar{Z}$ ثم نصل $\bar{A}\bar{O}$ ونمده حتى يلاقي $\bar{B}\bar{C}$ في $\bar{Y}$. ثم نصل $\bar{C}\bar{O}$ ونمده ليلاقي $\bar{A}\bar{B}$ في $\bar{R}$.

* البرهان :

في Fig (A) في $\triangle$ FAX يكون AF لا يتقابل أبداً مع $\bar{A}\bar{F}$ ولكنها يقعان في مستوى واحد هو مستوى المثلث XAF .

$$\therefore AF \,//\, \bar{A}\bar{F}$$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$AB \,//\, \bar{A}\bar{B}$, $BC \,//\, \bar{B}\bar{C}$, $CD \,//\, \bar{C}\bar{D}$, $DE \,//\, \bar{D}\bar{E}$,

$EF \,//\, \bar{E}\bar{F}$, $BF \,//\, \bar{B}\bar{F}$, $CF \,//\, \bar{C}\bar{F}$, $DF \,//\, \bar{D}\bar{F}$

في Δ XAF نجد أن $AF \,//\, \overline{\overline{AF}}$

$$\therefore \frac{AF}{\overline{\overline{AF}}} = \frac{AX}{\overline{\overline{AX}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

أيضاً بنفس الطريقة في Δ XAB يكون :

$$\frac{AB}{\overline{\overline{AB}}} = \frac{AX}{\overline{\overline{AX}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

From (1) & (2) , we result that :

$$\frac{AF}{\overline{\overline{AF}}} = \frac{AB}{\overline{\overline{AB}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

أيضاً من Δ XAB نجد أن :

$$\frac{AB}{\overline{\overline{AB}}} = \frac{BX}{\overline{\overline{BX}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

في $\Delta\, XBF$ نجد أن $BF \,//\, \overline{\overline{BF}}$

$$\therefore \frac{BF}{\overline{\overline{BF}}} = \frac{BX}{\overline{\overline{BX}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

From (4) & (5) it follows that :

$$\frac{AB}{\overline{AB}} = \frac{BF}{\overline{BF}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

From (3) & (6) we obtain :

$$\frac{AF}{\overline{AF}} = \frac{AB}{\overline{AB}} = \frac{BF}{\overline{BF}}$$

أي أن أضلاع المثلثان $\Delta\, ABF$ و $\Delta\, \overline{A}\overline{B}\overline{F}$ تكون متناسبة فهما متشابهان.

بالمثل يمكن إثبات أن :

المثلث $\Delta\, BCF$ يشابه المثلث $\Delta\, \overline{B}\overline{C}\overline{F}$

، المثلث $\Delta\, CDF$ يشابه المثلث $\Delta\, \overline{C}\overline{D}\overline{F}$

، المثلث $\Delta\, DEF$ يشابه المثلث $\Delta\, \overline{D}\overline{E}\overline{F}$

ولكن $\Delta\, ABF$ مشترك مع $\Delta\, BCF$ في الضلع BF

و $\Delta\, \overline{A}\overline{B}\overline{F}$ مشترك مع $\Delta\, \overline{B}\overline{C}\overline{F}$ في الضلع $\overline{B}\overline{F}$

– كما أن كل من $\Delta\, ABF$ و $\Delta\, BCF$ يقعان في مستوى واحد.

– أيضاً كل من $\Delta\, \overline{A}\overline{B}\overline{F}$ و $\Delta\, \overline{B}\overline{C}\overline{F}$ يقعان في مستوى واحد

∴ الشكلان $ABCF$ و $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{F}$ متشابهان .

– وبنفس الطريقة يمكن إثبات أنه بإضافة كل من $\Delta\, CDF$ و $\Delta\, DEF$ إلي الشكل $ABCF$ وأيضا بإضافة كل من $\Delta\, \overline{C}\overline{D}\overline{F}$ و $\Delta\, \overline{D}\overline{E}\overline{F}$ إلي الشكل $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{F}$.

∴ كل من الشكلان $ABCDEF$ و $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ متشابهان .

* بنفس الكيفية يمكن إثبات أن كل من الأشكال $ABCDEF$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$

, $\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}\bar{\bar{D}}\bar{\bar{E}}\bar{\bar{F}}$ تكون كلها متشابهة.

وهو المطلوب أولاً

* وفي Fig (B) عند توصيل أقطار الشكل السداسي $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$ فإنها تتلاقي في النقطة $\bar{O}$ وعلينا إثبات أن $\bar{O}$ تنطبق علي الشعاع $\overrightarrow{X\bar{X}}$

$\because$ الشكل $ABCDEF$ والشكل $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$ متوازيان و

$AD \in ABCDEF$, $\bar{A}\bar{D} \in \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$

$\therefore$ كل من $\bar{A}\bar{D}$, AD لا يتقابلان

, AD واصل بين الشعاعين $\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XD}$

, $\bar{A}\bar{D}$ واصل بين الشعاعين $\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XD}$

$\therefore$ فهما في مستوى واحد $\Leftarrow$ $AD // \bar{A}\bar{D}$

في $\Delta\, XAD$ فيه $AD // \bar{A}\bar{D}$

$\therefore$ كل من $\Delta\, XAD$ يشابه $\Delta\, X\bar{A}\bar{D}$

ولكن XO متوسط في $\Delta\, XAD$

$\therefore$ XO ينصف الضلع AD في O

$\therefore$ XO ينصف الضلع $\bar{A}\bar{D}$ في N

بالمثل XO ينصف الضلع $\bar{B}\bar{E}$ في N

أيضاً XO ينصف الضلع $\bar{C}\bar{F}$ في N

ولكن $\bar{O}$ هي مركز المسدس $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$

∴ N تنطبق علي النقطة $\bar{O}$

ولكن N تقع علي المستقيم XO

∴ $\bar{O}$ تقع علي المستقيم XO

وبالمثل يمكن إثبات أن النقطة $\bar{\bar{O}}$ تقع علي المستقيم XO .

∴ كل من النقاط $\bar{\bar{O}}$, $\bar{O}$, O تقع علي مستقيم واحد هو $\overleftrightarrow{X\bar{X}}$ أي تقع علي استقامة واحدة

وهو المطلوب ثانياً .

* في Fig (C) :

$\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ يشابه ΔABC

ولكن AY متوسط في ΔABC

، $\bar{A}\bar{Y}$ متوسط في $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

∴ $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{Y}$ يشابه ΔABY

$$\therefore \frac{AB}{\bar{A}\bar{B}} = \frac{AY}{\bar{A}\bar{Y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

ولكن كل من الأشعة $X\bar{X}$, XB , XA تقطع الثلاث مستويات المتوازية ABC , $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}$

∴ ΔABO يشابه $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{O}$

$$\therefore \quad \frac{AB}{\overline{\overline{AB}}} = \frac{AO}{\overline{\overline{AO}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

من (7) , (8) نستنتج أن :

$$\therefore \quad \frac{AY}{\overline{\overline{AY}}} = \frac{AO}{\overline{\overline{AO}}}$$

$$\therefore \quad \frac{AY}{AO} = \frac{\bar{A}\bar{Y}}{\bar{A}\bar{O}} = \frac{3}{2}$$

بالمثل يمكن إثبات أن :

$$\frac{\bar{B}\bar{Z}}{Bo} = \frac{3}{2} \qquad , \qquad \frac{\bar{C}\bar{R}}{CO} = \frac{3}{2}$$

أي أنه في $\Delta\, \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ نجد أن النقطة O قطعت كل من $\bar{A}\bar{Y}$, $\bar{B}\bar{Z}$, $\bar{C}\bar{R}$ بنسبة $2 : 1$ من جهة الرؤوس $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$.

$\therefore$ النقطة $\bar{O}$ هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث $\Delta\, \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن النقطة $\bar{\bar{O}}$ هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث $\Delta\, \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}$.

أي أن متوسطات المثلثات $\Delta\, \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}$, $\Delta\, \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $\Delta\, ABC$ تقع جميعها علي استقامة واحدة تمر بنقطة انطلاق الأشعة $\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{XC}$.

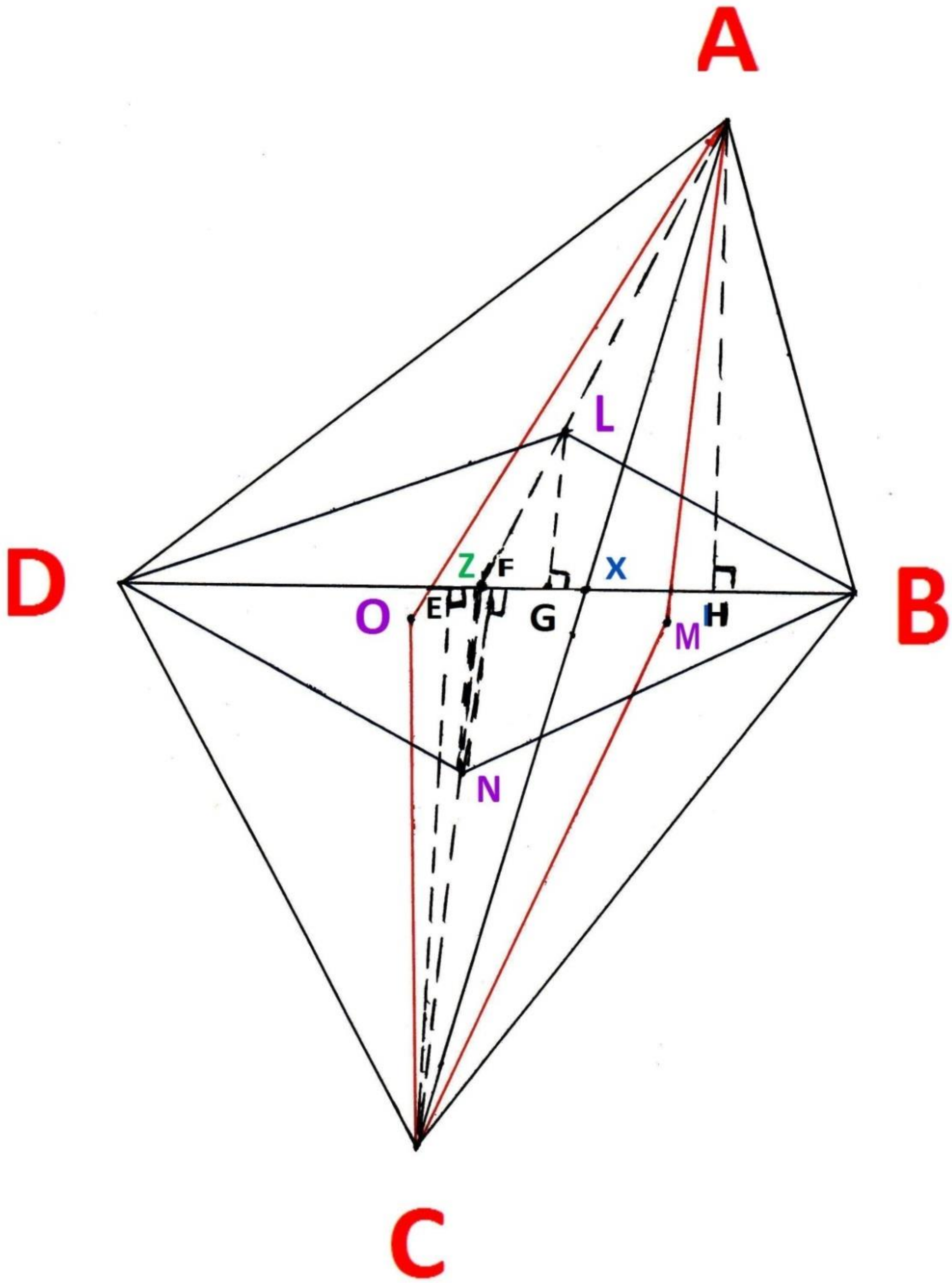
وهو المطلوب ثالثاً .

نظرية رباعيات أقطار الشكل الرباعي

* الشكل الرباعي الناتج من توصيل طرفي قطر في أي شكل رباعي مع مركزي مثلثية يكافئ الشكل الرباعي الناتج من توصيل طرفي القطر الآخر مع مركزي مثلثيه وكل منهم $= \frac{1}{3}$ الشكل الرباعي الأصلي .

* تعريف :

مثلثى القطر في أي شكل رباعي هما المثلثان الناتجان من الشكل الرباعي نتيجة لتوصيل هذا قطره .



* المعطيات :

ABCD شكل رباعي ، AC و BD قطري الشكل الرباعي تقاطعا في X .

M هي مركز المثلث ABC ، O هي مركز المثلث ADC ثم أن L هي مركز المثلث ABD ، N هي مركز المثلث BCD .

* المطلوب :

إثبات أن الشكل الرباعي AMCO يكافئ الشكل الرباعي DLBN وكل منهم يكافئ $\frac{1}{3}$ الشكل الرباعي ABCD .

* العمل :

ننصف القطر BD في Z ثم نصل AZ فيمر بالنقطة L ثم نصل CZ فيمر بالنقطة N ، ثم نسقط الأعمدة AH , LG , CE , NF كلهم علي DB فيقطعوه في النقاط H , G , E , F علي الترتيب .

* البرهان :

في المثلث Δ AZH يكون :

$$LG \parallel AH$$

$$\therefore \frac{LG}{AH} = \frac{ZL}{ZA} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore LG = \frac{1}{3} AH \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

* في المثلث Δ CGE يكون :

$$NF \parallel CE$$

$$\therefore \frac{NF}{CE} = \frac{ZN}{ZC} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore NF = \frac{1}{3} CE \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

من (1) نجد أن :

$$\Delta\, LBD \text{ area } = \frac{1}{2}\ BD\ .\ LG$$

$$= \frac{1}{3}\ BD\ .\ \frac{1}{3}\ AH$$

$$= \frac{1}{6}\ BD\ .\ AH \qquad \dots\dots\dots\dots (3)$$

بالمثل من (2) نجد أن :

$$\Delta\, ABD \text{ area } = \frac{1}{2}\ BD\ .\ AH \qquad \dots\dots\dots\dots (4)$$

From (3) & (4) , we find that :

$$\Delta\, LBD \text{ area } = \frac{1}{2}\ \Delta\, ABD \text{ area } \qquad \dots\dots\dots\dots (5)$$

$$,\quad \Delta\, NBD \text{ area } = \frac{1}{3}\ BD\ .\ NF =$$

$$= \frac{1}{2}\ BD\ .\ \frac{1}{3}\ CE =$$

$$= \frac{1}{6}\ BD\ .\ CE \qquad \dots\dots\dots\dots (6)$$

$$\Delta\, CBD \text{ area } = \frac{1}{2}\ BD\ .\ CE \qquad \dots\dots\dots\dots (7)$$

From (6) & (7) , we find :

$$\Delta\, NBD \text{ area } = \frac{1}{3}\ \Delta\, CBD \text{ area } \qquad \dots\dots\dots\dots (8)$$

$\therefore$ **by summation (5) & (8) it follows that :**

$$(\Delta\, LBD + \Delta\, NBD) =$$

$$= \frac{1}{3}\ (\Delta\, ABD + \Delta\, CBD)$$

$$\text{i.e}\quad \text{LBND area} = \frac{1}{3}\ \text{ABCD area} \qquad \dots\dots\ (9)$$

* by the some method , we can find that :

$$\text{AMCD area} = \frac{1}{3}\ \text{ABCD area} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\ (10)$$

From (9) & (10) , we find that :

$$\text{LBND area} = \text{AMCO area} =$$

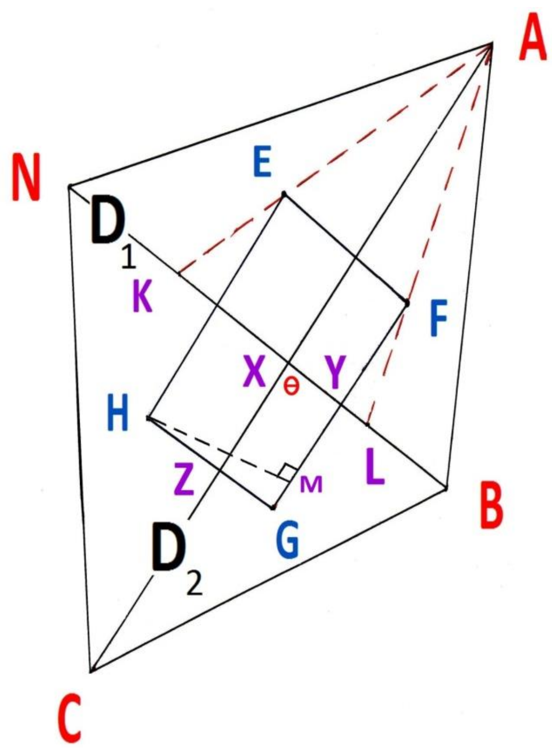
$$= \frac{1}{3}\ \text{ABCD area}$$

That is the required

وهو المطلوب إثباته

نظرية رباعيات مثلثات الشكل الرباعي

* إذا وصلت مراكز مثلثات أي شكل رباعي منتظم أو غير منتظم فيما بينهم ، فإنه يتكون متوازي أضلاع مساحته $= \frac{1}{4.5}$ من مساحة الشكل الرباعي.



* تعريف :

مثلثات الشكل الرباعي : هي 4 مثلثات ناتجة من تقاطع قطري الشكل الرباعي.

* المعطيات :

A B C N شكل رباعي غير منتظم وصل قطراه AC , BN فتقاطعا في X ، $\angle BXC$ هي θ .

وقد اعتبرنا أن القطر **BN** هو **D_1** والقطر **AC** هو **D_2** ،

E هي مركز المثلث **Δ AXN**

, **F** هي مركز المثلث **Δ AXB**

, **G** هي مركز المثلث **Δ BXC**

, **H** هي مركز المثلث **Δ CXN**

ثم وصلنا النقاط **E , F , G , H** فتكون الشكل **E F G H** .

كما أن **HG** قطع القطر **D_2** في **Z** ، **FG** قطع القطر **D_1** في **Y** .

* المطلوب :

١) إثبات أن الشكل **E F G H** هو متوازي أضلاع .

٢) أثبات أن :

$$\mathbf{EFGH\ area} = \frac{1}{4.5}\ \mathbf{ABCN\ area}$$

* العمل :

- نسقط العمود **HM** ليلاقي **FG** في **M** .

- نصل **AE** ونمده علي استقامته ليقطع القطر **D_1** في **K** .

- نصل **AF** ونمده علي استقامته ليقطع **D_1** في **L** .

* البرهان :

- **AK** متوسط في المثلث **Δ AXN**

$$\therefore \quad XK = \frac{1}{2} XN$$

- AL متوسط في المثلث ΔAXB

$$\therefore \quad XL = \frac{1}{2} XB$$

$$\therefore \quad XL = \frac{1}{2} D_1 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

- في المثلث ΔAKL نجد أن :

$$\therefore \quad \frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FL} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \quad EF \,//\, KL$$

- وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$HG \,//\, KL$$

$$\therefore \quad EF \,//\, HG \qquad ..\dots\dots\dots\dots (2)$$

* وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$EH \,//\, FG \qquad ..\dots\dots\dots\dots (3)$$

أي أن الشكل $EFGH$ فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

$\therefore$ الشكل $EFGH$ هو متوازي أضلاع

وهو المطلوب أولاً

- في المثلث ΔAKL نجد أن :

$$\therefore \quad \frac{AE}{AK} = \frac{EF}{KL} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad EF = \frac{2}{3} KL \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

But :

$$KX = \frac{1}{2} NX \quad , \quad LX = \frac{1}{2} BX$$

$$\therefore \ KL = \frac{1}{2} D_1$$

بالتعويض في (4) نجد أن :

$$EF = GH = \frac{1}{3} D_1 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

Also , we can prove that :

$$FG = \frac{1}{3} D_2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

$$* \ ABCN \ area = \frac{1}{2} D_1 \, D_2 \ \sin\theta \qquad \dots\dots\dots\dots \ (7)$$

$$* \ EFGH \ area = FG \, . \, HM \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \ (8)$$

ولكن في الشكل XYGZ نجد أن كل ضلعان متقابلان متوازيان

∴ الشكل XYGZ متوازي أضلاع

$$\therefore \angle G = \angle \theta$$

$$\therefore \ EFGH \ area = FG \, . \, HM =$$

$$= FG \, . \, HG \ \sin\theta$$

بالتعويض من (6) و (7) نجد أن :

$$EFGH \ area = \frac{1}{3} D_2 \, . \, \frac{1}{3} D_1 \ \sin\theta$$

$$= \frac{1}{9} D_1 \, D_2 \ \sin\theta \qquad \dots\dots\dots\dots \ (9)$$

$$\therefore \frac{\text{ABCN area}}{\text{EFGH area}} = \frac{\frac{1}{2} D_1 D_2 \sin\theta}{\frac{1}{9} D_1 D_2 \sin\theta} = \frac{9}{2} = \frac{4.5}{1}$$

$$\therefore \text{EFGH area} = \frac{1}{4.5} \text{ ABCN area}$$

وهو المطلوب ثانياً.

نظرية مراكز المثلثات القطرية لكرة

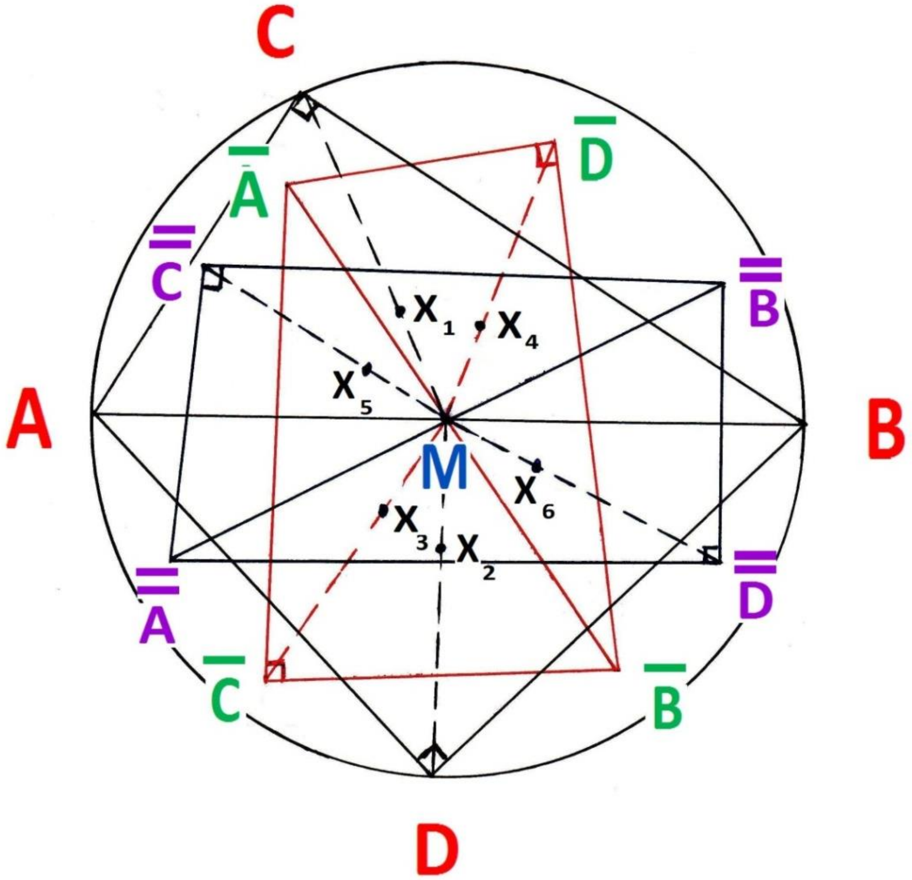
* مراكز المثلثات القطرية لأي كرة نصف قطرها R تقع جميعاً علي سطح كرة واحدة نصف قطرها r حيث :

$$\boxed{r = \frac{1}{3} R}$$

* تعاريف :

– المثلث القطري لكرة : هو أي مثلث مرسوم في الكرة بحيث تكون قاعدته قطر في الكرة ورأسه تقع علي محيط الكرة .

– المثلث القطري لدائرة : هو أي مثلث مرسوم في الدائرة بحيث تكون قاعدته قطر في الدائرة ورأسه تقع علي محيط الدائرة .



* المعطيات :

M كرة مركزها M ونصف قطرها R ، كل من ΔABC , ΔABD ,

$\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{D}$, $\Delta \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}$, $\Delta \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{D}}$ هم ستة مثلث قطرية في الكرة

M ، X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 , X_6 هم مراكز المثلثات القطرية

علي الترتيب .

* المطلوب :

إثبات أن النقاط X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 , X_6 تقع جميعاً علي

محيط دائرة واحدة نصف قطرها يساوى $\frac{1}{3}$ نصف قطر الكرة الأصلية M .

* العمل :

نصل كل من النقاط C , $\bar{C}$, $\bar{\bar{C}}$, D , $\bar{D}$, $\bar{\bar{D}}$ بمركز الكرة M .

* البرهان :

في المثلث ABC نجد أن المتوسط CM هو عبارة عن نصف قطر للكره

وبما أن النقطة X_1 هي مركز المثلث $\Delta\ ABC$ أي أن هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث $\Delta\ ABC$

∴ النقطة X_1 تقسم المتوسط الذي هو نصف قطر للكرة بنسبة $1:2$ من جهة النقطة C .

أي أن :

$$MX_1 = \frac{1}{3}\ MC \quad , \quad MX_2 = \frac{1}{3}\ MD \quad , \quad MX_3 = \frac{1}{3}\ M\bar{C}$$

$$, \quad MX_4 = \frac{1}{3}\ M\bar{D} \quad , \quad MX_5 = \frac{1}{3}\ M\bar{\bar{C}} \quad , \quad MX_6 = \frac{1}{3}\ M\bar{\bar{D}}$$

أي أن كل من القطع المستقيمة

$$MC = MD = M\bar{C} = M\bar{D} = M\bar{\bar{C}} = M\bar{\bar{D}}$$

ولكنهم جميعاً مشتركين في طرف واحد هو M ،

∴ كل منهم عبارة عن نصف قطر في كرة واحدة مركزها M ونصف قطرها r حيث :

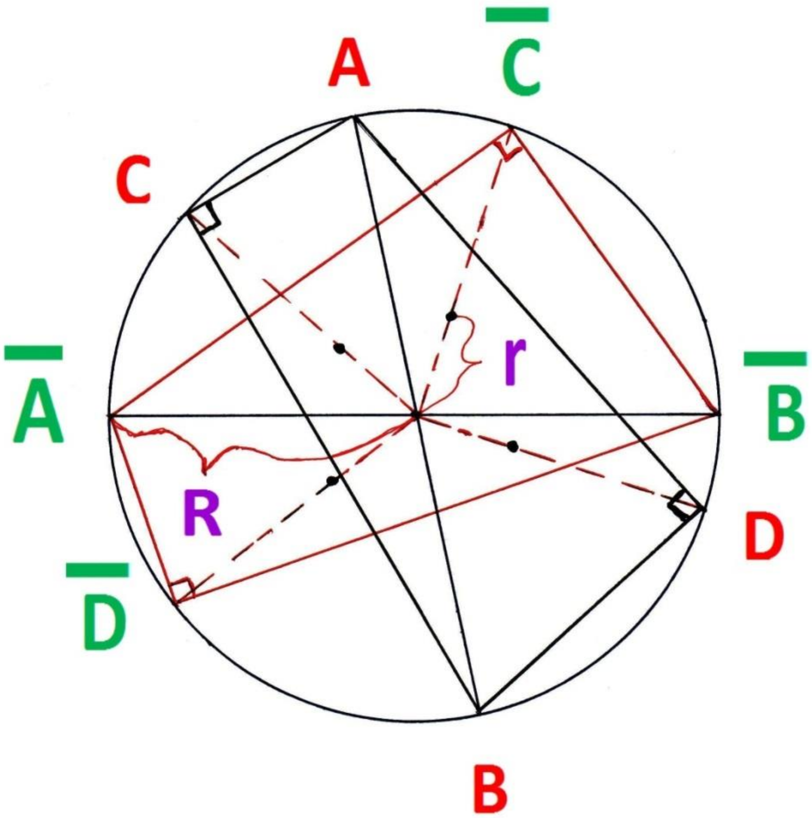
$$\boxed{r = \frac{1}{3}\ R}$$

وهو المطلوب إثباته

نتيجة لنظرية مراكز المثلثات القطرية لكرة

* مراكز المثلثات القطرية لأي دائرة نصف قطرها **R** تقع جميعاً علي وحيط دائرة واحدة نصف قطرها **r** حيث :

$$\boxed{r = \frac{1}{3} R}$$



نظرية مضلعات مثلثات المضلع المنتظم

* إذا وصلت مراكز مثلثات أي مضلع هندسي منتظم طول ضلعه L وعدد أضلاعه n ، فإن ينشأ مضلع هندسي منتظم طول ضلعه L_{-1} وعدد أضلاعه n حيث :

$$L_{-1} = \frac{2}{3} L \cos \frac{180}{n} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

كما أنه إذا وصلت مراكز مثلثات المضلع الهندسي الذي طول ضلعه L_{-1} سينتج مضلع هندسي منتظم طول ضلعه L_{-2} وهكذا إلي أن نصل إلي المضلع L_{-N} حيث :

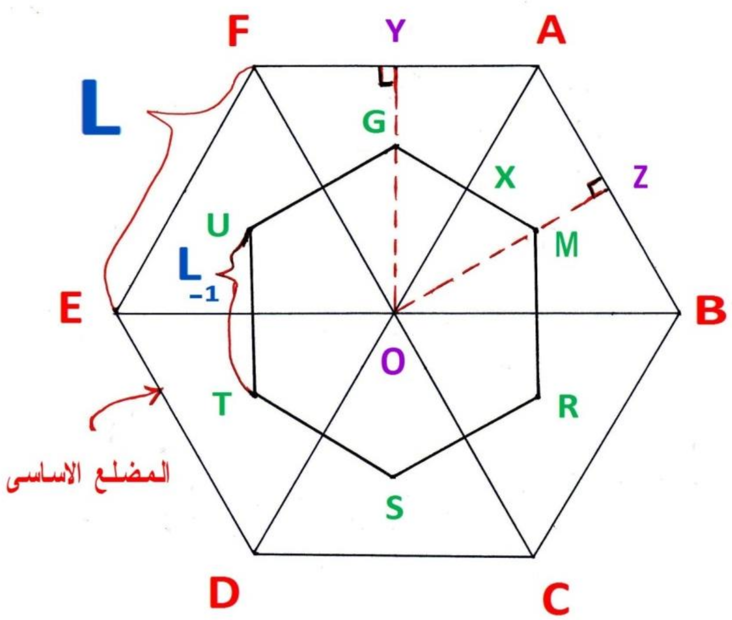
$$L_{-N} = L \left(\frac{2}{3} \cos \frac{180}{n} \right)^{N} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

كما أن المضلع الذي طول ضلعه L ناتج من توصيل مراكز مثلثات مضلع أكبر منه طول ضلعه L_1 حيث :

$$L_1 = \frac{3}{2} L \sec \frac{180}{n} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

كما أن المضلع ذات الضلع L_1 ناتج من توصيل مراكز مثلثات مضلع أكبر منه طول ضلعه L_2 وهكذا إلي أن نصل للمضلع الذي طول ضلعه L_N حيث :

$$L_N = L \left(\frac{3}{2} \sec \frac{180}{n} \right)^{N} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

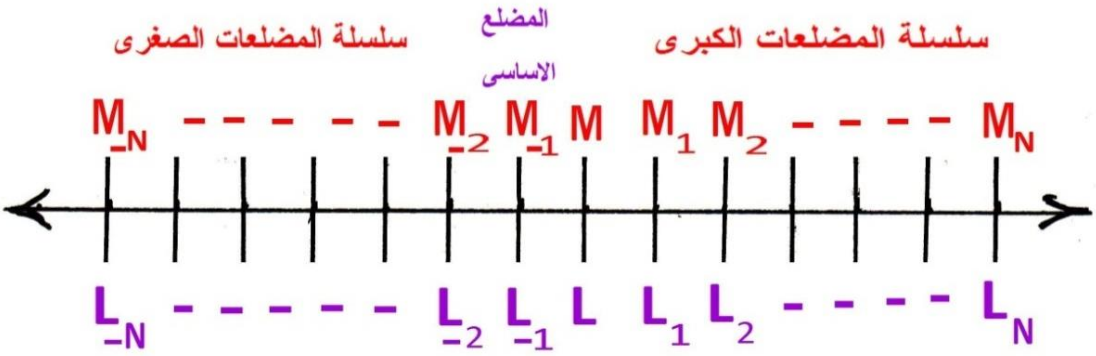


* تعاريف :

- مركز أي مثلث : هو نقطة تقاطع متوسطاته وهو مركز ثقله .

- مثلثات أي مضلع هندسي منتظم : هي المثلثات الناشئة من توصيل مركز المضلع مع رؤوسه .

* تمثل النظرية بخط بياني يشمل أطوال أضلاع كل من المضلع الأساسي L وأطوال أضلاع سلسلة المضلعات الصغرى و سلسلة المضلعات الكبرى ويسمي (خط توضيحى لمضلعات مثلثات المضلعات) .



* **المعطيات :**

ABCDEF مضلع هندسي سداسي منتظم طول ضلعه **L** ، وصلت النقطة **O** التي هي مركز المضلع برؤوسه **A** و **B** و **C** و **D** و **E** و **F** فتكون **6** مثلثات وصل مراكز المثلثات الناشئة فتكون المضلع **GMRSTU** الذي طول ضلعه L_{-1} .

* **المطلوب :**

١- إيجاد قيمة L_{-1} وقيمة L_{-N} في سلسلة المضلعات الصغرى .

٢- إيجاد قيمة طول ضلع المضلع الأكبر الذي نشأ من توصيل مراكز مثلثاته المضلع الأساسي والذي طول ضلعه L_1 وأيضاً إيجاد قيمة L_N وهي طول ضلع المضلع رقم **N** في سلسلة المضلعات الكبرى .

* **العمل :**

نسقط العمودان $OY \perp AF$ و $OZ \perp AB$ فتقع النقطة **G** علي **OY** والنقطة **M** علي **OZ** كما أنه قد تقاطع **GM** مع **OA** في **X** .

* **البرهان :**

المثلث $\Delta\ OAB$ متساوى الساقين

$$\text{but}\quad OZ \perp AB$$

$$\therefore\ AZ = BZ$$

في $\Delta\ OAZ$ يكون :

$$\angle AOB = \frac{360}{n}$$

حيث **n** هي عدد أضلاع المضلع .

ولكن **OZ** ينصف الزوايا **∠ AOB**

$$\therefore \ \angle AOZ = \frac{360}{n}$$

$$OZ = AZ \ \cot an \ \angle AOZ =$$

$$= {}^{1}\!/_{2} \ L \ \cot an \ \frac{180}{N}$$

$$\text{but} \quad OM = {}^{2}\!/_{3} \ OZ$$

$$\therefore \ OM = {}^{2}\!/_{3} \times {}^{1}\!/_{2} \ L \ \cot an \ \frac{180}{n} =$$

$$= {}^{1}\!/_{3} \ L \ \cot an \ \frac{180}{n}$$

$$\text{but} \quad XM = OM \ \sin \frac{180}{n}$$

$$= {}^{1}\!/_{3} \ L \ \cot an \ \frac{180}{n} \ \sin \frac{180}{n}$$

$$= {}^{1}\!/_{3} \ L \ \frac{\text{cosin} \frac{180}{n}}{\sin \frac{180}{n}} \ . \ \sin \frac{180}{n}$$

$$= {}^{1}\!/_{3} \ L \ \text{cosin} \ \frac{180}{n}$$

$$\text{but} \quad XM = {}^{1}\!/_{2} \ GM$$

حيث أن GM هو طول ضلع المضلع GMRSTU الناشئ من توصيل مراكز مثلثات المضلع الأصلي ABCDEF فنفرض أن طول ضلع المضلع GMRSTU هو L_{-1} .

$$\therefore \quad \boxed{L_{-1} = {}^{2}/_{3}\ L\ \cos \frac{180}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نفرض أن طول ضلع المضلع الناشئ من توصيل مراكز مثلثات المضلع الذي طول ضلعه L_{-1} هو L_{-2} .

$$\therefore \quad L_{-2} = {}^{2}/_{3} \left({}^{2}/_{3}\ L\ \cos \frac{180}{n} \right) \cos \frac{180}{n}$$

$$= L \left({}^{2}/_{3} \cos \frac{180}{n} \right)^{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{Also } L_{-3} = L \left({}^{2}/_{3} \cos \frac{180}{n} \right)^{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\therefore \quad \boxed{L_{-n} = L \left({}^{2}/_{3}\ \cos \frac{180}{n} \right)^{N}}$$

وهو المطلوب أولاً.

وبالعكس المضلع الأساسي الذي طول ضلعه L يعتبر مضلع ناتج من توصيل مراكز مثلثات مضلع أكبر منه طول ضلعه L_1 حيث :

$$L = {}^{2}/_{3}\ L_1\ \cos \frac{180}{n}$$

$$\therefore \quad L_1 = {}^{3}/_{2}\ L\ \sec \frac{180}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\therefore \quad L_2 = {}^{3}/_{2} \left(\frac{3}{2} L \sec \frac{180}{n} \right) \sec \frac{180}{n}$$

$$\therefore L_2 = L \left({}^{2}/_{3} \sec \frac{180}{n} \right)^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

Also $\quad L_3 = L \left(\frac{3}{2} \sec \frac{180}{n} \right)^3 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (6)$

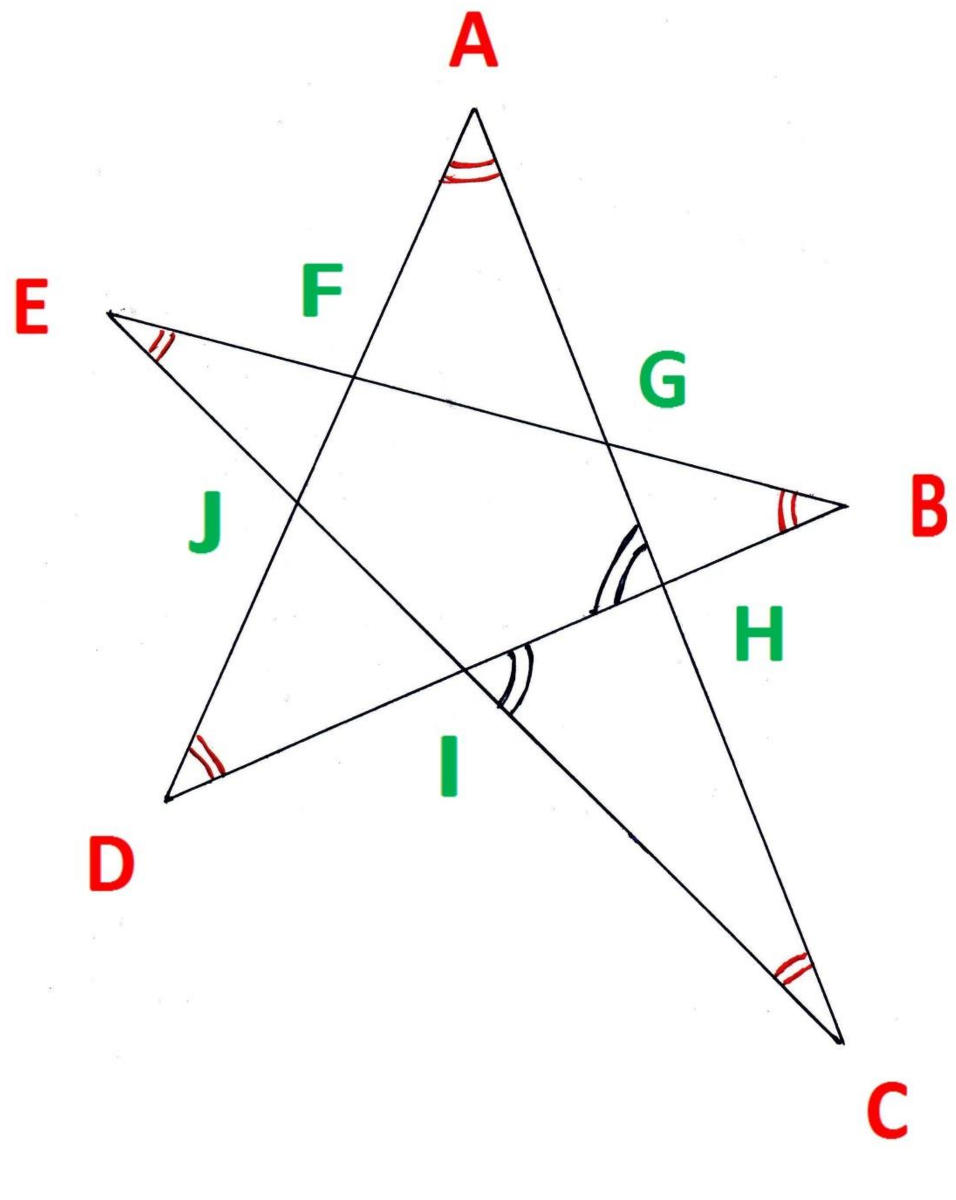
From (4) , (5) , (6) , we obtain :

$$\therefore \quad \boxed{L_n = L \left(\frac{3}{2} \sec \frac{180}{n} \right)^N}$$

وهو المطلوب ثانياً .

حقيقة هندسية

* في أي نجمة خماسية هندسية يكون مجموع زوايا رؤوس النجمة = 180^{o}



* المعطيات : ABCDE نجمة هندسية خماسية .

* المطلوب :

إثبات أن زوايا رؤوس النجمة = 180^{o} .

* البرهان :

في المثلث $\Delta\ AHD$ مجموع زوايا ١٨٠ درجة .

i.e $\angle A + \angle D + \angle AHD = 180^o$

ولكن $\angle AHD$ خارجة عن $\Delta\ CIH$

$\therefore\ \angle AHD = \angle HIC + \angle C$

$\therefore\ \angle A + \angle D + \angle C +$

$\angle HIC = 180^o \quad \dots\dots\dots\dots (1)$

ولكن $\angle HIC$ خارجة عن $\Delta\ EBI$

$\therefore\ \angle HIC = \angle E + \angle B$

بالتعويض في معادلة (1) يكون :

$\therefore\ \angle A + \angle D + \angle C + \angle E + \angle B = 180^o$

أي أن مجموع زوايا رؤوس النجمة الخماسية الهندسية $= 180^o$

وهو المطلوب إثباته .

نظرية أبعاد نقاط الهرم عن رؤوسه

* في أي هرم ثلاثي منتظم يكون مجموع مربعات أبعاد أي نقطة تنتمي إلي الهرم عن رؤوسه

$$= \quad \left(1.5\ L^2 + 4\, X^2 \right)$$

حيث:

L هي طول حرف الهرم .

, **X** هي بعد النقطة عن مركز الهرم .

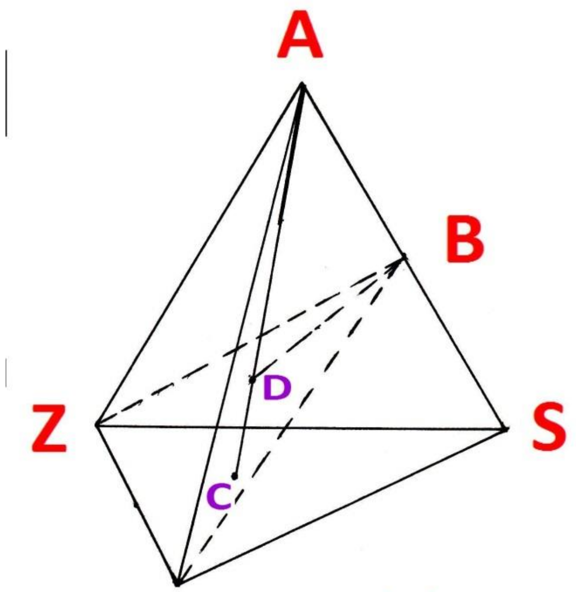


Fig (B)

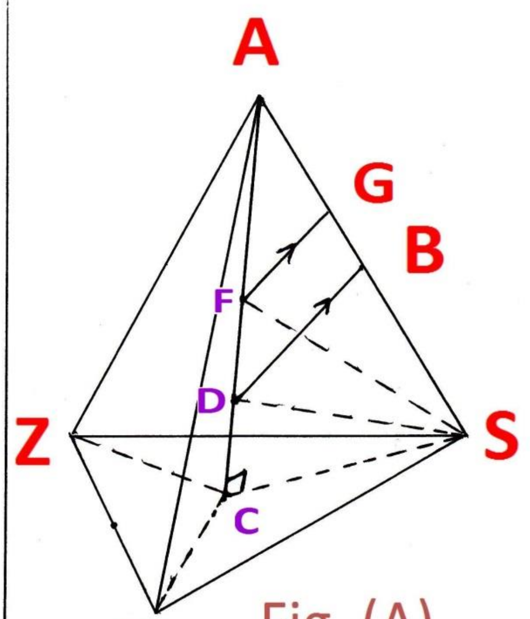


Fig (A)

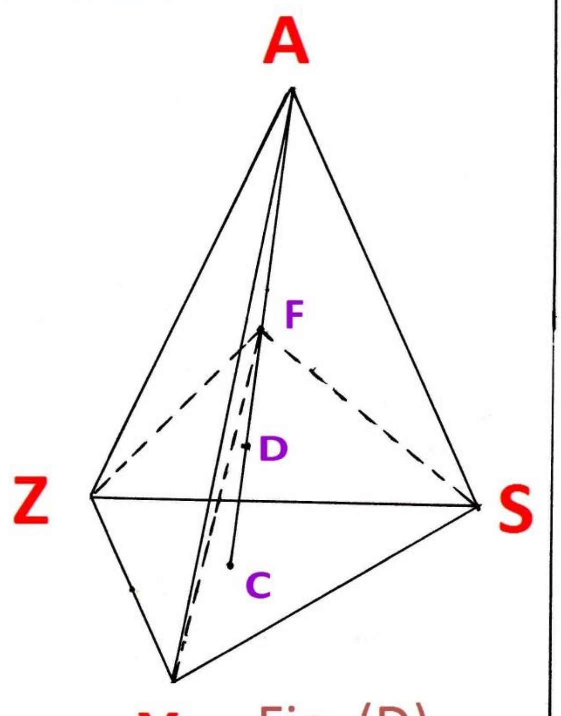


Fig (D)

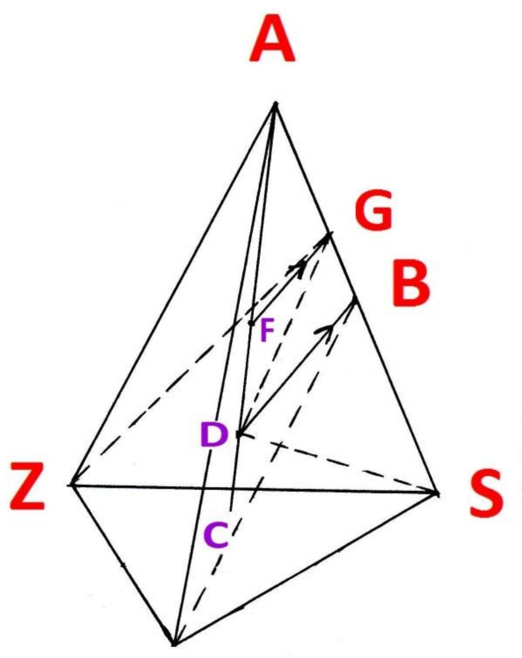


Fig (C)

*** المعطيات:**

A . SYZ هرم ثلاثي منتظم طول ضلعه L ، مركزة النقطة D ، B منتصف AS ، C هي مركز القاعدة SYZ ، F منتصف AC ، AC هو ارتفاع الهرم .

رسم من F المستقيم FG عمودي علي AS ويقطعه في G .

*** المطلوب :**

إثبات أن أي من النقاط S , B , G , C , F , D يكون مجموع مربعات أبعاد أي منهم عن رؤوس الهرم =

$$= 1.5\ L^2 + 4\ X^2$$

حيث :

L هي طول حرف الهرم،

X هي بعد أي من النقاط السابقة عن مركز الهرم .

*** العمل :**

في Fig (A) :

نصل النقطة S لكل من النقاط D , F , C ، ثم نصل النقطة C بكل من Z , Y .

في Fig (B) :

نصل النقطة B بكل من النقاط D , Z , Y .

في Fig (C) :

نصل النقطة G بكل من Z , Y , D ثم نصل SD .

في Fig (D) :

نصل النقطة بكل من Z , Y , S .

* حقائق :

في الهرم الثلاثي المنتظم الذي طول ضلعه L يكون :

١) جميع ارتفاعات الهرم متساوية .

٢) المسافات بين مركز الهرم ورؤوسه متساوية .

٣) ارتفاع الهرم $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} L$

٤) جميع أوجه الهرم عبارة عن مثلثات متساوية الأضلاع ومتطابقة .

٥) مركز الهرم يقسم أي ارتفاع له بنسبة 3 : 1 من جهة الرأس .

٦) جميع ارتفاعات الهرم تتلاقي في نقطة واحدة هي مركز الهرم .

٧) مركز أى مثلث يقسم أى متوسط فيه بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .

* طبقا للثوابت السابقة يكون البرهان كالآتى :

* البرهان :

مجموع مربعات أبعاد النقطة S عن رؤوس الهرم =

$$= (SA)^2 + (SY)^2 + (SZ)^2 = 3L^2 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

لكن مربع بعد النقطة S عن مركز الهرم هو X_S^2 حيث :

$$X_S^2 = \left(\frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} L\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} L\right)^2 = \frac{3}{8} L^2$$

$$\therefore \quad 4X_S^2 = 1.5 \ L^2$$

∴ مجموع مربعات أبعاد النقطة S عن رؤوس الهرم =

$$= 3L^2 = 1.5 \ L^2 + 1.5 \ L^2 =$$

$$= 1.5 \ L^2 + 4X_S^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

* في Fig (B) :

مجموع مربعات أبعاد النقطة B عن رؤوس الهرم =

$$= (BA)^2 + (BS)^2 + (BY)^2 + (BZ)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{2} L\right)^2 + \left(\frac{1}{2} L\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} L\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} L\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} L^2 + \frac{1}{4} L^2 + \frac{3}{4} L^2 + \frac{3}{4} L^2 =$$

$$= \frac{8}{4} L^2 = 2 \ L^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

ولكن مربع بعد النقطة B عن مركز الهرم هو X_B^2 .

المثلث ADB قائم الزاوية في B ذلك لأن $\Delta\ DAS$ متساوى الساقين ، B في منتصف القاعدة AS .

$$\therefore \quad (BD)^2 = (AD)^2 - (AB)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ L\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\ L\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\ L\right)^2 - \frac{1}{4}\ L^2 = \frac{3}{8}\ L^2 - \frac{2}{8}\ L^2 = \frac{1}{8}\ L^2$$

$$\therefore \quad X_B^2 = \frac{1}{8}\ L^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 4\, X_B^2 = \frac{1}{2}\ L^2$$

$\therefore$ مجموع مربعات أبعاد النقطة B عن رؤوس الهرم =

$$= 2\ L^2 = 1.5\ L^2 + \frac{1}{2}\ L^2 =$$

$$= 1.5\ L^2 + 4\ X_B^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

* في Fig (A) :

مجموع مربعات أبعاد النقطة C عن رؤوس الهرم =

$$= (CS)^2 + (CZ)^2 + (CY)^2 + (CA)^2$$

ولكن $CS = CY = CZ$

$\therefore$ مجموع مربعات الأبعاد =

$$= 3\ (CS)^2 + (CA)^2$$

$$= 3\left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\ L\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ L\right)^2$$

$$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ L\right)^2 + \frac{2}{3}\ L^2 =$$

$$= \frac{3}{3}\ L^2 + \frac{2}{3}\ L^2 = 1\frac{2}{3}\ L^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\ (5)$$

ولكن مربع بعد النقطة C عن مركز الهرم هو X_C^2 حيث :

$$X_C^2 = (DC)^2 = \left(\frac{1}{4}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ L\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\ L\right)^2 = \frac{1}{24}\ L^2$$

$$\therefore\ 4\,X_C^2 = 4 \times \frac{1}{24}\ L^2 = \frac{1}{6}\ L^2$$

$\therefore$ مجموع مربعات أبعاد النقطة C عن رؤوس الهرم =

$$= 1\frac{2}{3}\ L^2 = 1\frac{1}{2}\ L^2 + \frac{1}{6}\ L^2 =$$

$$= 1.5\ L^2 + 4\ X_C^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\ (6)$$

في المثلث $\Delta\ ADB$ نجد أن :

$$FG\ //\ DB \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AB}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ L\ \Big/\ \frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ L = \frac{AG}{\frac{1}{2}\ L}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2\ AG}{L} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2}{3} = \frac{2\ AG}{L}$$

$$\therefore \quad AG = \frac{1}{3} L \quad \Longrightarrow \quad GS = \frac{2}{3} L$$

في المثلث $\Delta\, AZS$ نجد أن :

B منتصف AS

$$\therefore \quad \angle ZBG = 90^o$$

في المثلث $\Delta\, ZBG$ نجد أنه قائم الزاوية في B

$$\therefore \quad (GZ)^2 = (GB)^2 + (BZ)^2$$

$$= (AB - AG)^2 + (BZ)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{3} L \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} L \right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{6} L \right)^2 + \frac{3}{4} L^2$$

$$= \frac{1}{36} L^2 + \frac{27}{36} L^2 =$$

$$= \frac{28}{36} L^2 = \frac{7}{9} L^2$$

$$\therefore \quad (GZ)^2 = \frac{7}{9} L^2$$

ولكن المثلثان $\Delta\, AGZ$ و $\Delta\, AGY$ فيهما ضلعان وزاوية محصورة متناظرين متساويين ، ∴ المثلثان متطابقان

$$\therefore \quad GZ = GY$$

∴ مجموع مربعات أبعاد النقطة G عن رؤوس الهرم =

$$= (GS)^2 + (GA)^2 + 2(GZ)^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{3}L\right)^2 + \left(\frac{1}{3}L\right)^2 + 2\left(\frac{7}{9}L^2\right)$$

$$= \frac{4}{9}L^2 + \frac{1}{9}L^2 + \frac{14}{9}L^2$$

$$= \frac{19}{9}L^2 = 2\frac{1}{9}L^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

لكن مربع بعد النقطة G عن مركز الهرم هو X_G^2 حيث :

$$X_G^2 = (DG)^2 = (DB)^2 + (GB)^2$$

$$\text{but} \quad AG = \frac{1}{3}L$$

$$\therefore \quad GB = \left(\frac{1}{2}L - \frac{1}{3}L\right)$$

$$= \frac{3}{6}L - \frac{2}{6}L = \frac{1}{6}L$$

$$\therefore \quad (GB)^2 = \frac{1}{36}L^2$$

$$\text{but} \quad (DB)^2 = \frac{1}{8}L^2$$ (أثبت من قبل)

$$\therefore \quad X_G^2 = (DG)^2 = \frac{1}{8}L^2 + \frac{1}{36}L^2$$

$$= \frac{9}{72}L^2 + \frac{2}{72}L^2 = \frac{11}{72}L^2$$

$$\therefore \quad 4(X_G)^2 = \frac{4 \times 11}{72}L^2 = \frac{11}{18}L^2$$

∴ مجموع مربعات أبعاد النقطة G عن رؤوس الهرم =

$$= 2\frac{1}{9} L^2 = \frac{19}{9} L^2 = \frac{38}{18} L^2$$

$$= \frac{27}{18} L^2 + \frac{11}{18} L^2 =$$

$$= 1.5 L^2 + 4 X_G^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

* في Fig (D) :

مجموع مربعات أبعاد النقطة F عن رؤوس الهرم =

$$= (FA)^2 + (FS)^2 + (FY)^2 + (FZ)^2$$

∵ AC هو ارتفاع الهرم علي القاعدة SYZ .

∴ أبعاد أي نقطة علي الارتفاع AC من رؤوس القاعدة SYZ تكون متساوية

$$\therefore \quad FS = FY = FZ$$

∴ مجموع مربعا الأبعاد =

$$= (FA)^2 + 3(FS)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} L^2\right) + 3\left[(FC)^2 + (CS)^2\right]$$

$$= \frac{1}{6} L^2 + 3\left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} L\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} L\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{6} L^2 + 3\left[\left(\frac{1}{\sqrt{6}} L\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} L\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{6} L^2 + 3 \left(\frac{1}{6} L^2 + \frac{1}{3} L^2 \right)$$

$$= \frac{1}{6} L^2 + \frac{3}{6} L^2 + L^2 = 1\frac{4}{6} L^2 \quad \dots\dots\dots\dots (9)$$

ولكن مربع بعد النقطة F عن مركز الهرم هو X_F^2 حيث :

$$X_F^2 = \left(\frac{1}{4} AC \right)^2 = \left(\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} L \right)^2 = \frac{1}{24} L^2$$

$$\therefore 4 X_F^2 = \frac{4}{24} L^2 = \frac{1}{6} L^2$$

∴ مجموع مربعات أبعاد النقطة F عن رؤوس الهرم =

$$= 1\frac{4}{6} L^2 = 1.5 L^2 + \frac{1}{6} L^2$$

$$= 1.5 L^2 + 4 X_F^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots (10)$$

* D هي مركز الهرم الثلاثي المنتظم لذلك فجميع أبعاد النقطة D عن رؤوس الهرم تكون متساوية .

– مجموع مربعات أبعاد النقطة D عن رؤوس الهرم =

$$= 4 (AD)^2 = 4 \left(\frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} L \right)^2$$

$$= 4 \left(\frac{9}{16} \times \frac{2}{3} L^2 \right) = 1.5 L^2 \quad \dots\dots\dots\dots (11)$$

ولكن مربع بعد النقطة D عن مركز الهرم = صفر

$$\therefore \quad X_D = O \qquad \Longrightarrow \qquad X_D^2 = O$$

أي أن مجموع مربعات أبعاد النقطة D عن رؤوس الهرم =

$$= 1.5\ L^2 + O = 1.5\ L^2 + 4\ X_D^2 \qquad \ldots\ldots (12)$$

* واضح من المعادلات (2) , (4) , (6) , (8) , (10) , (12) أن

مجموع مربعات أبعاد أي نقطة تنتمي إلي هرم ثلاثي منتظم = قيمة ثابتة =

$$1.5\ L^2 + 4\ X^2$$

حيث :

L هي طول حرف الهرم

, X هي بعد النقطة عن مركز الهرم .

وهو المطلوب إثباته

حقائق

* المستقيم الواصل من مركز المكعب إلي منتصف أي حرف في المكعب يكون عمودي عليه .

* المستقيم الواصل من مركز المكعب إلي مركز أي وجه في المكعب يكون عمودي عليه .

* إذا كان طول حرف المكعب هو $\mathbf{L}$ فإن :

- قطر وجه المكعب $= \sqrt{2}\ \mathbf{L}$

- قطر المكعب $= \sqrt{3}\ \mathbf{L}$

نظرية أبعاد نقاط المكعب عن رؤوسه

* مجموع مربعات أبعاد أي نقطة تنتمي لمكعب طول حرفه **L** عن رؤوسه

$$= \ 6\ L^2 + 8\ X^2$$

حيث **X** هي بعد النقطة عن مركز المكعب .

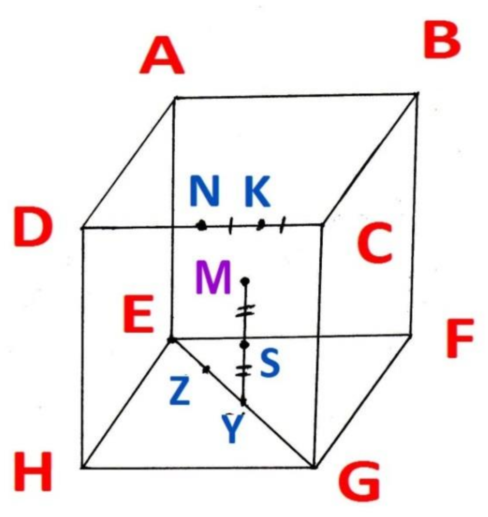


Fig (A)

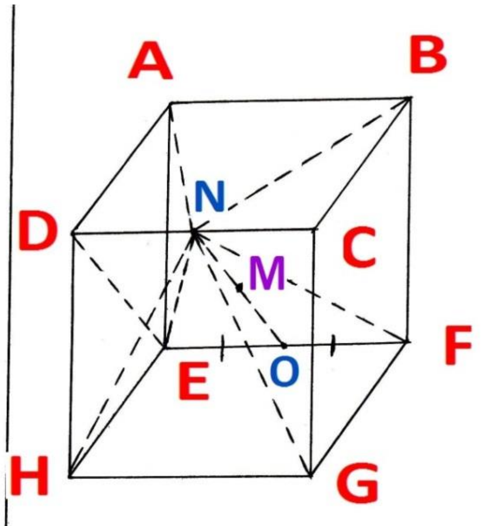


Fig (B)

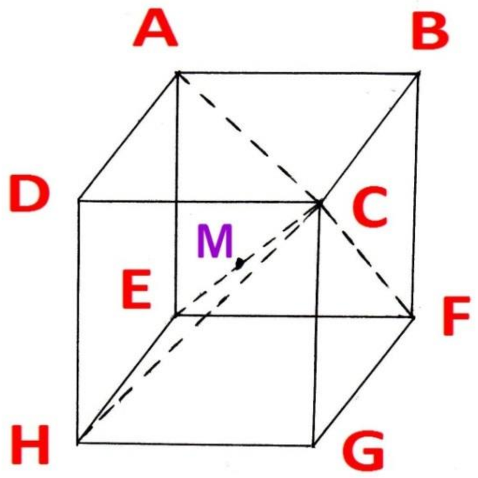


Fig (C)

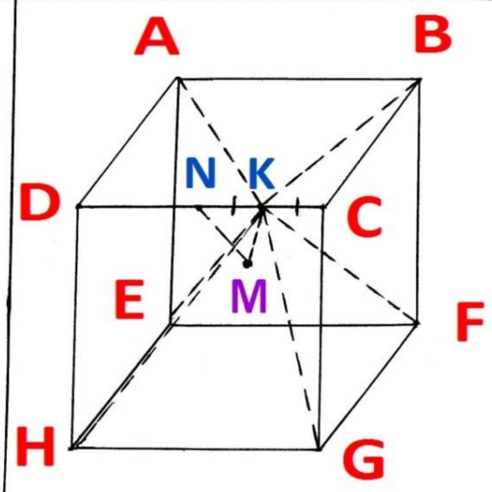


Fig (D)

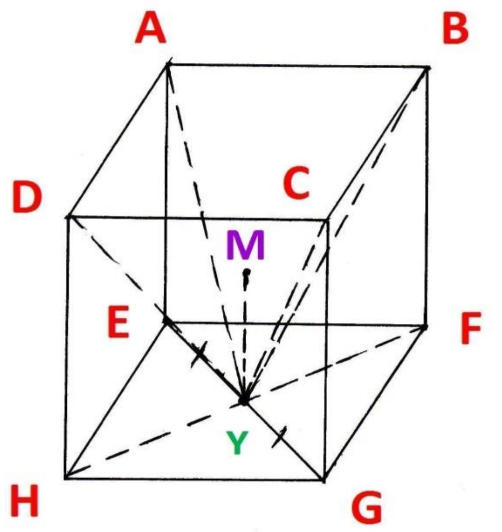


Fig (E)

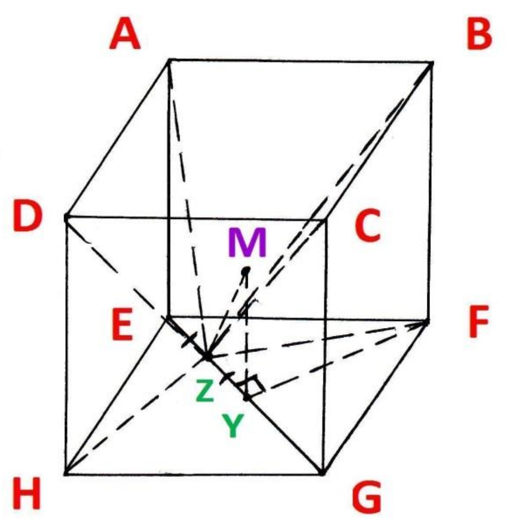


Fig (F)

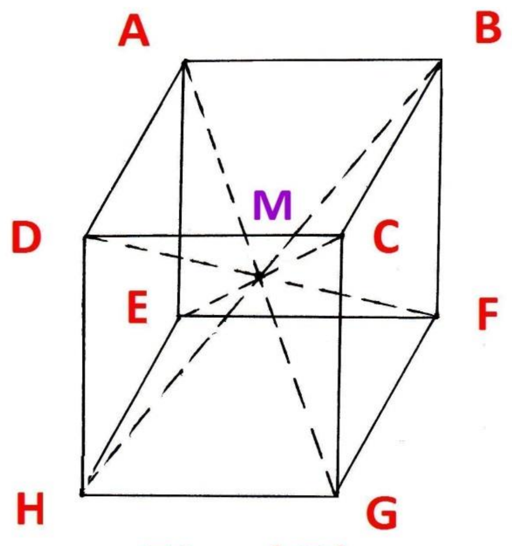


Fig (G)

* المعطيات :

كما هو واضح في Fig (A) :

ABCDEFGH مكعب مركزه M وطول حرفه L . كل من النقاط الأتية وهي Z , Y , S , M , C , K , N نقاط تنتمي للمكعب وتبعد عن مركزه بالمسافات X_Z , X_Y , X_S , X_M , X_C , X_K , X_N علي الترتيب حيث :

N منتصف DC ، K منتصف NC ، C هي رأس من رؤوس المكعب ، M هي مركز المكعب ، S منتصف MY ، Y منتصف EG ، Z منتصف EY .

* المطلوب :

إثبات أن مجموع مربعات أبعاد أي نقطة من النقاط Z , Y , S , M , C , K , N عن رؤوس المكعب = $6L^2 + 8X^2$ حيث :

L هي طول حرف المكعب .

و X هي بعد النقطة عن مركز المكعب .

* العمل :

– في Fig (B) :

نصل النقطة N بكل من النقاط H , G , F , E , B و A . ثم نصل N بمنتصف EF في O لذلك فهو يمر بمركز المكعب .

- في Fig (C) :

نصل النقطة C بكل من النقاط H , F , E , A

- في Fig (D) :

نصل النقطة K بكل من النقاط H , G , F , E , B , A ثم نصل المركز M بكل من النقاط N , K .

- في Fig (E) :

نصل النقطة Y بكل من النقاط F , E , D , C , B , A ثم نصل النقطة Y بالمركز M .

- في Fig (F) :

نصل النقطة Z بكل من النقاط H , F , D , C , B , A ثم نصل المركز M بالنقاط Z , Y ثم نصل FY .

- في Fig (G) :

نصل نقطة المركز M بالنقاط H , G , F , E , D , C , B , A .

* البرهان :

* (النقطة N) :

في Fig (B) :

مجموع مربعات أبعاد النقطة N عن رؤوس المكعب =

$$= [\,(NA)^2 + (NB)^2 + (NH)^2 + (NG)^2\,] +$$

$$[\,(ND)^2 + (NC)^2\,] + [\,(NE)^2 + (NF)^2\,]$$

كل من المثلثات الأتية متطابقة وذلك لتساوى ضلعين وزاوية محصورة قائمة في كل منهم وهم $\Delta\, NCG$, $\Delta\, NDH$, $\Delta\, NCB$, $\Delta\, NDA$ وينتج

من التطابق أن : $NA = NB = NH = NG$

$$\therefore\ (NA)^2 = (NB)^2 = (NH)^2 = (NG)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\, L\right)^2 + L^2 = 1\frac{1}{4}\, L^2$$

كما أن كل من المثلثات $\Delta\ NAE$, $\Delta\ NBF$ متطابقان لتساوى ضلعان وزاوية محصورة قائمة في كل منهم .

$\therefore$ ينطبق المثلثان وينتج أن :

$$NE = NF$$

$$\therefore\ (NE)^2 = (NF)^2 = (NA)^2 + (AE)^2 =$$

$$= 1\,\frac{1}{4}\, L^2 + L^2 = 2\,\frac{1}{4}\, L^2$$

Also :

$$ND = NC$$

$$\therefore\ (ND)^2 = (NC)^2 = \frac{1}{4}\, L^2$$

$\therefore$ مجموع مربعات أبعاد النقطة N عن رؤوس المكعب =

$$= [\,(NA)^2 + (NB)^2 + (NH)^2 + (NG)^2\,] +$$

$$[\,(ND)^2 + (NC)^2\,] + [\,(NE)^2 + (NF)^2\,]$$

$$= 4\left(1\frac{1}{4}\ L^2\right) + 2\left(\frac{1}{4}\ L^2\right) + 2\left(2\,\frac{1}{4}\ L^2\right) =$$

$$= 5\ L^2 + \frac{1}{2}\ L^2 + 4\frac{1}{2}\ L^2 = 10\ L^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ولكن بعد النقطة N عن مركز المكعب هو X_N

$$\therefore\ (X_N)^2 = (NM)^2$$

$\because$ N في منتصف DC ولكننا عندما وصلنا النقطة N بالمركز ومدنا فهو حتماً يلاقي EF في المنتصف في O وذلك لأن NMO يقع تمامه في المستوى $CDEF$ وهو عبارة عن مستطيل تقع فيه نقطة مركز المكعب ويكون NO هو مستقيم واصل بين منتصفي ضلعين في المستطيل $CDEF$.

$$\therefore\ ND = OE \quad \text{but} \quad ND \,/\!/\, OE$$

$\therefore$ الشكل $NDEO$ هو متوازي أضلاع

$$\therefore\ NO = DE$$

$$\therefore\ NM = \frac{1}{2}\ DE = X_C$$

$$\therefore\ (X_N)^2 = \left(\frac{1}{2}\ DE\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{(EH)^2 + (DH)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\ [\ (EH)^2 + (DH)^2\ ] =$$

$$= \frac{1}{4}\ (L^2 + L^2) = \frac{1}{4}\ (2\,L^2) = \frac{1}{2}\ L$$

$$\therefore \; 8\,(X_N)^2 = 8 \times \frac{1}{2}\,L^2 = 4\,L^2$$

$\therefore$ مجموع مربعات أبعاد النقطة N عن مركز المكعب =

$$= 10\,L^2 = 6\,L^2 + 4\,L^2 =$$

$$= 6\,L^2 + 8\,X_N^2 \qquad \dots\dots\dots\dots (2)$$

* (النقطة C) :

في $Fig\ (C)$:

مجموع مربعات أبعاد النقطة C عن رؤوس المكعب =

$$[(CB)^2 + (CD)^2 + (CG)^2] +$$

$$[(CA)^2 + (CF)^2 + (CH)^2] + (CE)^2 =$$

$$= 3\,L^2 + (3 \times 2\ L^2) + 3\,L^2 = 12\,L^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ولكن بعد النقطة C عن مركز المكعب هو X_C حيث : $X_C = MC$

$$\therefore\ (X_c)^2 = (MC)^2 = \left(\frac{1}{2}\ ME\right)^2 = \frac{1}{4}\ (ME)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \times 3\,L = \frac{3}{4}\ L^2$$

$$\therefore\quad 8\ X_C^2 = 6\ L^2$$

$\therefore$ مجموع مربعات أبعاد النقطة C عن رؤوس المكعب =

$$= 12\ L^2 + 6\,L^2 + 6\,L^2 =$$

$$= 6\,L^2 + 8\ X_C^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

* (النقطة K) :

في $Fig\ (D)$:

مجموع مربعات أبعاد النقطة K عن رؤوس المكعب =

$$= (KC)^2 + (KD)^2 + [(KG)^2 + (KB)^2] +$$

$$[(KA)^2 + (KH)^2] + (KF)^2 + (KE)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\,L\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\,L\right)^2 + 2\left[\left(\frac{1}{4}\,L\right)^2 + L^2\right] +$$

$$2\left[\left(\frac{3}{4}\,L\right)^2 + L^2\right] + \left[\left(\frac{1}{4}\,L\right)^2 + \left(\sqrt{2}\,L\right)^2\right] +$$

$$\left[\left(\frac{3}{4}\,L\right)^2 + \left(\sqrt{2}\,L\right)^2 =\right.$$

$$= \frac{1}{16}\,L^2 + \frac{9}{16}\,L^2 + \frac{2}{16}\,L^2 + 2\,L^2 + \frac{18}{16}\,L^2$$

$$+ \;2\,L^2 + \frac{1}{16}\,L^2 + 2\,L^2 + \frac{9}{16}\,L^2 + 2\,L^2 =$$

$$= \frac{40}{16}\,L^2 + 8\,L^2 = 2.5\;L^2 + 8\,L^2 = 10.5\;L^2 \ldots\ldots\ldots (5)$$

ولكن بعد النقطة K من مركز المكعب هو X_K حيث :

$$X_K = KM$$

المثلث $\Delta\; KNM$ قائم الزاوية في N .

$$NM = \frac{1}{2}\;CF$$

$$\therefore\; (KM)^2 = (KN)^2 + (NM)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\,L\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\,L\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\,L^2 + \frac{1}{2}\,L^2 = \frac{9}{16}\,L^2$$

$$\therefore\; X_K^2 = \frac{9}{16}\,L^2 \;\Longrightarrow\; 8\;X_K = \frac{8\times 9}{16}\,L^2 = 4.5\;L^2$$

$\therefore$ مجموع مربعات أبعاد النقطة K عن رؤوس المكعب =

$$= \mathbf{10.5\ L^2} = \mathbf{6\ L^2} + \mathbf{4.5\ L^2} =$$

$$= \mathbf{6\ L^2} + \mathbf{8\ X_K^2} \qquad \dots\dots\dots\dots\ (\mathbf{6})$$

* (النقطة Y) :

في Fig (E) : مجموع مربعات أبعاد النقطة Y عن رؤوس المكعب =

$$= (YE)^2 + (YF)^2 + (YG)^2 + (YH)^2 +$$

$$(YA)^2 + (YB)^2 + (YC)^2 + (YD)^2 =$$

$$= 4\ (YE)^2 + 4\ (YA)^2 =$$

$$= 4\ (YE)^2 + 4\ [(YE)^2 + (AE)^2] =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\ L\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\ L\right)^2 + 4\,L^2 =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\ L\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\ L\right)^2 + 4\,L^2 =$$

$$= 2\ L^2 + 2\ L^2 + 4\ L^2 = 8\ L^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\ (7)$$

ولكن بعد النقطة Y عن مركز المكعب هو X_Y حيث :

$$\therefore\ X_Y = \frac{1}{2}\ L^2 \qquad \Longrightarrow \qquad X_Y^2 = \frac{1}{4}\ L^2$$

$$\therefore\ 8\ X_Y^2 = 2\ L^2$$

∴ مجموع مربعات أبعاد النقطة Y عن رؤوس المكعب =

$$= 8\ L^2 = 6\ L^2 + 2\ L^2 = 6\ L^2 + 8\,X_Y^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\ (8)$$

* (النقطة Z) :

في Fig (F) : مجموع مربعات أبعاد النقطة Z عن رؤوس المكعب =

$$= [\,(ZE)^2 + (ZG)^2 + [\,(ZF)^2 + (ZH)^2 + (ZA)^2 +$$

$$(ZC)^2 + (ZB)^2 + (ZD)^2\,]$$

المثلثان $\Delta\ ZEF$ و $\Delta\ ZEH$ فيهما ضلعان وزاوية محصورة متناظرين ومتساويين $\therefore$ المثلثان متطابقان.

$$\therefore\ ZF = ZH$$

أيضا المثلثان $\Delta\ ZFB$ و $\Delta\ ZHD$ فيهما ضلعان وزاوية قائمة محصورة متناظرين ومتساويين ، $\therefore$ المثلثان متطابقان.

$$\therefore\ ZB = ZD$$

المثلث $\Delta\ ZYF$ قائم الزاوية في Y .

$$\therefore\ (ZF)^2 = (ZY)^2 + (YF)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times \sqrt{2}\ L\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\ L\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{16}\ L^2 + \frac{2}{4}\ L^2 = \frac{2}{16}\ L^2 + \frac{8}{16}\ L^2 =$$

$$= \frac{10}{16}\ L^2 = \frac{5}{8}\ L^2$$

المثلث ZFB قائم الزاوية في F لذلك .

$$(ZB)^2 = (ZF)^2 + (FB)^2 = \frac{5}{8}\ L^2 + L^2 = 1\frac{5}{8}\ L^2$$

ولكن بعد النقطة Z عن مركز المكعب هو X_Z حيث :

$$X_Z^2 = \left(\frac{1}{4} \times \sqrt{2}\, L\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\, L\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{8}\ L^2 + \frac{1}{4} L^2 = \frac{1}{8}\ L^2 + \frac{2}{8} L^2 = \frac{3}{8}\ L^2$$

$$\therefore\ 8\ X_Z^2 = 8 \times \frac{3}{8} L^2 = 3\ L^2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\ (9)$$

∴ مجموع مربعات أبعاد النقطة Z عن رؤوس المكعب =

$$= 9\ L^2 = 6\ L^2 + 3\ L^2 = 6\ X^2 + 8\ X_Z^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

* (النقطة M) :

في Fig (M) : مجموع مربعات أبعاد النقطة M عن رؤوس المكعب =

$$= 8\ (MA) = 8\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3}\ L\right)^2 =$$

$$= 8\left(\frac{3}{4}\ L^2\right) = 6\ L^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

ولكن بعد النقطة M عن مركز المكعب = صفر = X_M

$$\therefore\ X_M^2 = Zero \quad \Longrightarrow \quad 8\ X_M^2 = Zero$$

∴ مجموع مربعات أبعاد النقطة M عن رؤوس المكعب =

$$= 6\ L^2 = 6\ L^2 + Zero = 6\ L^2 + 8\ X_M^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

* من المعادلات :

(2) , (4) , (6) , (8) , (10) , (12) يتضح لنا أن :

مجموع مربعات أبعاد أي نقطة تنتمي إلي مكعب عن

رؤوسه = $6\,L^2 + 8\,X^2$ حيث :

L هي طول حرف المكعب . و X هي بعد النقطة عن مركز المكعب .

وهو المطلوب إثباته

* نتيجة :

مجموع مربعات أبعاد أي رأس من رؤوس المكعب عن باقي رؤوسه = $12\ L^2$

نظرية مضلعات مثلثات نقاط المضلع

في أي مضلع هندسي منتظم أو غير منتظم يكون جميع المضلعات النقطية لجميع النقاط التي تنتمي لداخل محيط المضلع المناصف للمضلع الأساسي تكون متطابقة و يكون مساحة أى منهم تساوى أربعة أتساع مساحة المضلع المناصف .

* تعاريف :

- المضلع المناصف لمضلع : هو المضلع الناشئ من توصيل نقاط تنصيف أضلاع المضلع الأصلي .
- المثلثات النقطية لمضلع : هم المثلثات الناتجة من توصيل أى نقطة تنتمى لداخل محيط المضلع برؤوس المضلع .
- المضلع النقطى لمضلع أساسى : هو المضلع الناتج من توصيل نقاط مراكز المثلثات النقطية للمضلع الاساسى .

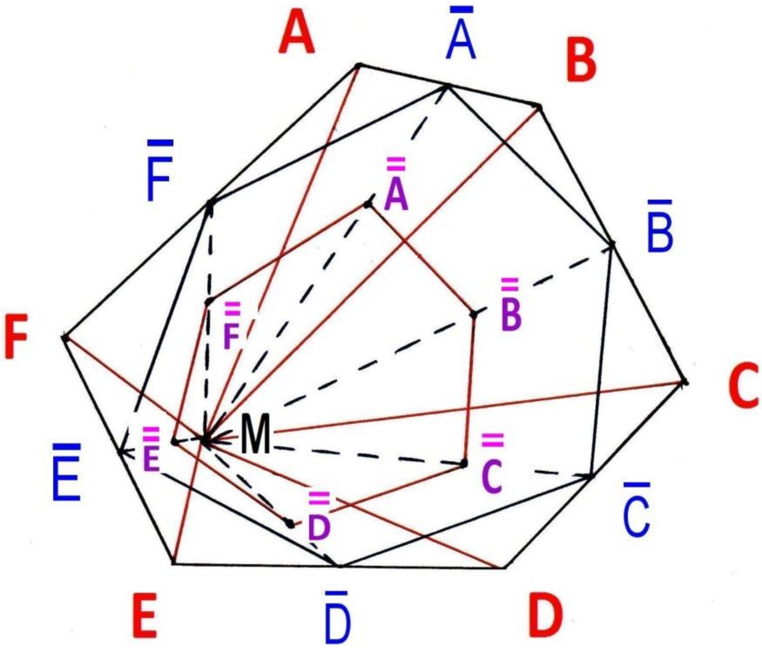

A
$\bar{A}$
B
$\bar{F}$
$\bar{\bar{A}}$
$\bar{B}$
$\bar{\bar{B}}$
F
$\bar{\bar{F}}$
C
M
$\bar{\bar{E}}$
$\bar{E}$
$\bar{\bar{C}}$
$\bar{C}$
$\bar{\bar{D}}$
E
$\bar{D}$
D

Fig (A)

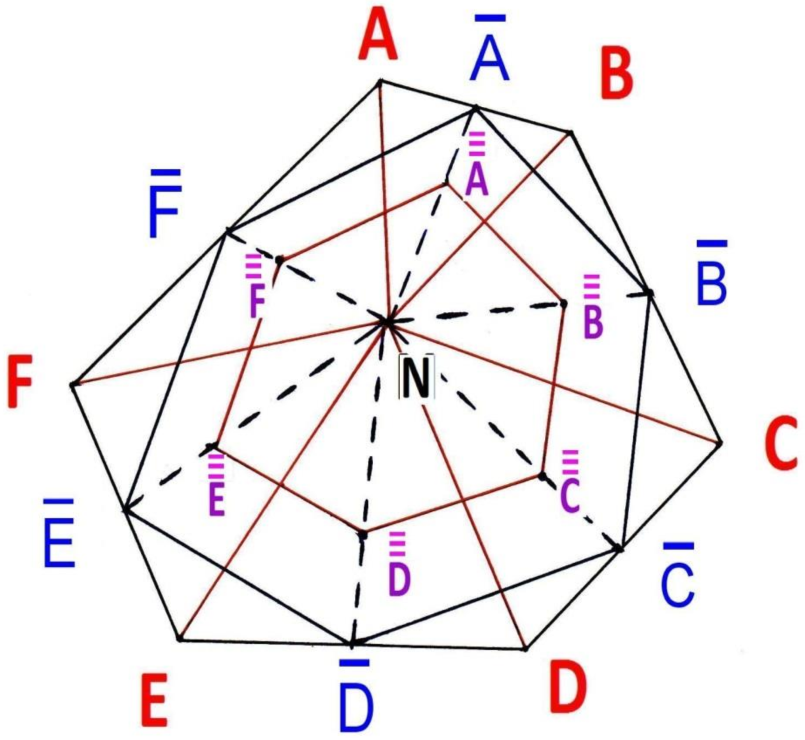


Fig (B)

*** المعطيات:**

A B C D E F مضلع هندسى غير منتظم ، M , N نقطتان تنتميان لداخل محيط المضلع المناصف $\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}\ \bar{D}\ \bar{E}\ \bar{F}$. في Fig (A)

في Fig (A) وصلت M برؤوس المضلع الأساسي فتكونت المثلثات النقطية للنقطة M وصلت مراكز تلك المثلثات النقطية فتكون المضلع النقطى $\bar{\bar{A}}\ \bar{\bar{B}}\ \bar{\bar{C}}\ \bar{\bar{D}}\ \bar{\bar{E}}\ \bar{\bar{F}}$.

في Fig (B) بالنسبة للنقطة N لو حدث نفس الشئ كما حدث في النقطة M فتكون المضلع النقطى $\bar{\bar{\bar{A}}}\ \bar{\bar{\bar{B}}}\ \bar{\bar{\bar{C}}}\ \bar{\bar{\bar{D}}}\ \bar{\bar{\bar{E}}}\ \bar{\bar{\bar{F}}}$.

* المطلوب :

إثبات أن كل من المضلعان النقطيين $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$, $\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{E}}\,\bar{\bar{F}}$

متطابقان و أن مساحة أيمنهما تساوى (أربعة أتساع) المضلع المناصف .

* العمل :

في الشكلين نصل كل من النقطتين M , N برؤوس المضلع المناصف

$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$.

* البرهان :

في Fig (A) نجد أن :

$M\,\bar{A}$ متوسط للمثلث $\Delta\,MBC$ ، $\bar{\bar{A}}$ مركز المثلث

$$\therefore \quad \frac{M\bar{\bar{A}}}{M\bar{A}} = \frac{2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$M\,\bar{B}$ متوسط للمثلث $\Delta\,MBC$، $\bar{\bar{B}}$ مركز المثلث

$$\therefore \quad \frac{M\bar{\bar{B}}}{M\bar{B}} = \frac{2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

From (1) , (2) we find that :

$$\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}} \,//\, \bar{A}\bar{B} \quad , \quad \frac{\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}} = \frac{2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بالتناظر

$$\therefore \quad \angle\, M\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}} = \angle\, M\bar{A}\bar{B}$$

بالتناظر

$$, \qquad \angle\ \mathbf{M\bar{\bar{B}}\bar{\bar{A}}} \quad = \quad \angle\ \mathbf{M\bar{B}\bar{A}}$$

* في المثلثان $\Delta\ M\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}$, $\Delta\ M\bar{A}\bar{B}$ نجد أن :

$$\frac{M\bar{\bar{A}}}{M\bar{A}} = \frac{M\bar{\bar{B}}}{M\bar{B}} = \frac{\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}} = \frac{2}{3} \qquad \dots\dots\dots\dots(4)$$

$$,\ \angle\ M\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}} = \angle\ M\bar{A}\bar{B} \qquad \dots\dots\dots\dots(5)$$

بنفس الطريقة في المثلثان $\Delta\ M\bar{\bar{A}}\bar{\bar{F}}$, $\Delta\ M\bar{A}\bar{F}$ يمكن إثبات أن :

$$\frac{\bar{\bar{A}}\bar{\bar{F}}}{\bar{A}\bar{F}} = \frac{2}{3} \qquad \dots\dots\dots\dots(6)$$

$$,\ \angle\ M\bar{\bar{A}}\bar{\bar{F}} = \angle\ M\bar{A}\bar{F} \qquad \dots\dots\dots\dots(7)$$

From (4) , (6) we find that :

$$\frac{\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}} = \frac{\bar{\bar{A}}\bar{\bar{F}}}{\bar{A}\bar{F}} = \frac{2}{3}$$

* وهكذا يمكن إثبات أنه في المضلعان النقطيان $\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{E}}\,\bar{\bar{F}}$,

$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$ جميع أضلاعهم المتناظرة متناسبة .

From (5) , (7) we find that :

$$\angle\ \bar{\bar{F}}\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}} = \angle\ \bar{F}\bar{A}\bar{B}$$

* هكذا يمكن إثبات أنه في المضلعان $\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{E}}\,\bar{\bar{F}}$, $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$

جميع زواياهم المتناظرة متساوية

$\therefore$ المضلعان النقطيان متشابهان .

* في **Fig (B)** نجد أنه بالمثل يمكن إثبات أن كل من المضلعان النقطيان

$\bar{\bar{\bar{A}}}\,\bar{\bar{\bar{B}}}\,\bar{\bar{\bar{C}}}\,\bar{\bar{\bar{D}}}\,\bar{\bar{\bar{E}}}\,\bar{\bar{\bar{F}}}$, $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$ متشابهان وأن :

$$\frac{\overline{\overline{\overline{A}}}\,\overline{\overline{\overline{F}}}}{\overline{A}\,\overline{F}} = \frac{2}{3} \qquad \dots\dots\dots\dots(8)$$

∴ كل من المضلعان $\overline{\overline{A}}\ \overline{\overline{B}}\ \overline{\overline{C}}\ \overline{\overline{D}}\ \overline{\overline{E}}\ \overline{\overline{F}}$, $\overline{\overline{\overline{A}}}\ \overline{\overline{\overline{B}}}\ \overline{\overline{\overline{C}}}\ \overline{\overline{\overline{D}}}\ \overline{\overline{\overline{E}}}\ \overline{\overline{\overline{F}}}$ متشابهان.

$$\because \quad \frac{\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}}{\overline{A}\,\overline{B}} = \frac{\overline{\overline{\overline{A}}}\,\overline{\overline{\overline{B}}}}{\overline{A}\,\overline{B}} = \frac{2}{3} \quad ,$$

$$\therefore \quad \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{\overline{A}}}\,\overline{\overline{\overline{B}}}$$

وبما أن المضلعان $\overline{\overline{A}}\ \overline{\overline{B}}\ \overline{\overline{C}}\ \overline{\overline{D}}\ \overline{\overline{E}}\ \overline{\overline{F}}$, $\overline{\overline{\overline{A}}}\ \overline{\overline{\overline{B}}}\ \overline{\overline{\overline{C}}}\ \overline{\overline{\overline{D}}}\ \overline{\overline{\overline{E}}}\ \overline{\overline{\overline{F}}}$ متشابهان ولكن بهما ضلعان متناظران متساويان.

∴ المضلعان متطابقان .

لذلك يمكن إثبات أن جميع المضلعات النقطية لجميع النقط التي تنتمي الى داخل محيط المضلع المناصف لمضلع أساسى تكون جميعها متطابقة.

وهو المطلوب أولا

حالة خاصة

في أي مضلع هندسي منتظم طول ضلعه **L** وعدد أضلاعه **n** ومساحته **M** يكون جميع المضلعات النقطية للمضلع الهندسى المنتظم و التي تنتمي إلي داخل محيط المضلع المناصف للمضلع الهندسي المنتظم تكون متطابقة وكل منهم له مساحة $\bar{M}$ حيث :

$$\boxed{\bar{M} = \frac{4}{9}\ cosin^2\left(\frac{180}{n}\right)\ M}$$

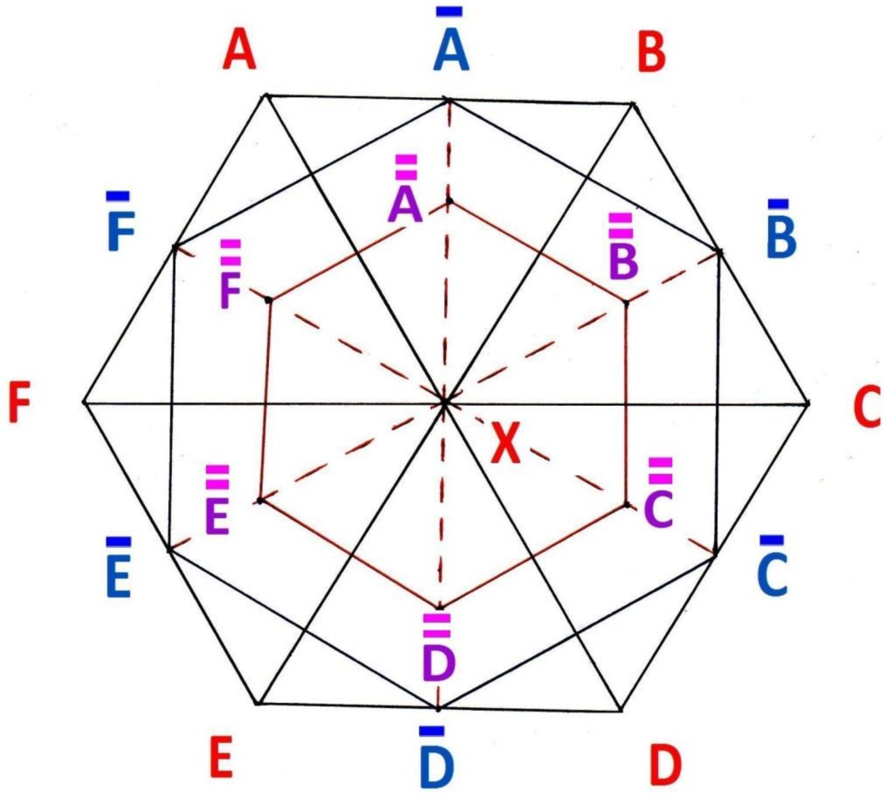


Fig (C)

* المعطيات :

$A\,B\,C\,D\,E\,F$ مضلع هندسي منتظم طول ضلعه L وعدد أضلاعه n ومساحته M ، $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$ هو المضلع المناصف له ، X هي مركز المضلع وصلت X برؤوس المضلع $A\,B\,C\,D\,E\,F$ فتكون عدد n من المثلثات وصلت مراكز تلك المثلثات فتكون المضلع النقطى $\bar{\bar{A}}\,\bar{\bar{B}}\,\bar{\bar{C}}\,\bar{\bar{D}}\,\bar{\bar{E}}\,\bar{\bar{F}}$ له مساحة هي $\bar{M}$.

* المطلوب :

إثبات أن

$$\bar{M} = \frac{4}{9}\ \text{cosin}^2\left(\frac{180}{n}\right)\ M$$

* العمل :

نصل مركز المضلع X بمراكز المثلثات التي هي رؤوس المضلع $\bar{\bar{A}}\ ,\ \bar{\bar{B}}\ ,\ \bar{\bar{C}}\ ,\ \bar{\bar{D}}\ ,\ \bar{\bar{E}}\ ,\ \bar{\bar{F}}$ ونمدهم فيلاقوا نقاط أنصاف المضلع الهندسي $A\,B\,C\,D\,E\,F$ التي هي رؤوس المضلع المنصف $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$.

* البرهان :

كما هو واضح في النظرية أنه أي نقطة تنتمي إلي داخل محيط المضلع المناصف تنطبق عليها النظرية لذلك في هذه الحالة نبرهن علي نقطة المركز .

* المضلع $A\,B\,C\,D\,E\,F$ طول ضلعه L

∴ مساحة المضلع الاساسي M حيث :

$$\frac{1}{4}\ L^2\ n\ \ \text{cotan}\ \frac{180}{n}\ =\ M \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\ (1)$$

المضلع $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}\,\bar{E}\,\bar{F}$ هو مضلع مناصف للمضلع الهندسي، لذلك طول ضلعه L_{-1} حيث :

$$L_{-1}\ =\ L\ \text{cosin}\ \left(\frac{180}{n}\right) \qquad \dots\dots\dots\ \text{(نظرية المضلعات المتناصفة)}$$

$$\therefore\ \ \bar{A}\bar{B}\ =\ L\ \text{cosin}\ \left(\frac{180}{n}\right) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\ (2)$$

في المثلث $X\bar{A}\bar{B}$ يكون :

$X\bar{A}$, $X\bar{B}$ متوسطان لمثلثان متساويا الأضلاع ومنطبقان .

$$\therefore\ \ \frac{X\bar{\bar{A}}}{X\bar{A}}\ =\ \frac{X\bar{\bar{B}}}{X\bar{B}}\ =\ \frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\ //\ \bar{A}\bar{B}$$

$$\therefore\ \ \angle X\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\ =\ \angle X\bar{A}\bar{B} \quad ,$$

$$\angle\ X\bar{\bar{B}}\bar{\bar{A}}\ =\ \angle X\bar{B}\bar{A}$$

$\therefore$ كل من المثلثان $\Delta\ X\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}$, $\Delta\ X\bar{A}\bar{B}$ متشابهان لتساوى الزوايا المناظرة لكل منهما.

$$\therefore\ \ \frac{\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}}{\bar{A}\bar{B}}\ =\ \frac{X\bar{\bar{A}}}{X\bar{A}}\ =\ \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \ (\,\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\,)\ =\ \frac{2}{3}\ (\,\bar{A}\bar{B}\,)$$

$$\therefore\ \ (\,\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\,)\ =\ \frac{2}{3}\ L\ \text{cosin}\ \left(\frac{180}{n}\right)$$

$$\therefore\ \ \bar{M}\ =\ \frac{1}{4}\ (\,\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\,)^2\ n\ \ \text{cotan}\left(\frac{180}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\ L\ cosin\left(\frac{180}{n}\right)\right]^2\ n\ \ cotan\left(\frac{180}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{4}{9}\ L^2\ \ cosin^2\left(\frac{180}{n}\right)\ n\ \ cotan\left(\frac{180}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\ L^2\ n\ \ cosin^2\left(\frac{180}{n}\right)\ cotan\left(\frac{180}{n}\right) \qquad \dots\dots\dots\ (3)$$

* **From (1) , (3) we find that :**

$$\frac{M}{\overline{M}} = \frac{\frac{1}{4}\ L^2\ \ n\ \ cotan\left(\frac{180}{n}\right)}{\frac{1}{9}\ L^2\ \ n\ \ cosin^2\left(\frac{180}{n}\right)\ \ cotan\left(\frac{180}{n}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}\ cosin^2\left(\frac{180}{n}\right)} = \frac{1}{4}\times\frac{9}{cosin^2\left(\frac{180}{n}\right)}$$

$$\therefore\quad \frac{M}{\overline{M}} = \frac{9}{4\ \ cosin^2\left(\frac{180}{n}\right)}$$

$$\therefore\quad \overline{M} = \frac{4}{9}\ cosin^2\left(\frac{180}{n}\right)\ M$$

وهو المطلوب إثباته

جمهورية مصر العربية
المجلس الاعلي للثقافة
الامانة العامة
الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات
ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: ١٨٠٠٦ عدد المرفقات ٤٩م تاريخ الأيداع ١٩ / ٣ / ٢٠١٨ الســاعة م ٣٩:١٠:١٢

اسم طالب الإيداع: عاطف شكشك عبد المجيد شكشك

اسم الشهرة:

رقم الأيداع: ١٨٠٠٦ الجنسية: مصرى التليفون: ٠١٢٢٩٩٣٠٧٩٥

محل الأقامة: ٨عمارات حى الزهور - بالخانكة - القليوبية

الحى : الخانكه المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة:

اسم الوكيل: التليفون: —

محل الأقامة: —

عنوان المصنف: بحث فى الهندسة المستوية والفراغية .

نوع المصنف: مصنف علمى مكتوب - نظريات رياضية

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

بحث يحتوى على (٤) نظريات هندسية وحاله خاصه وهم .
نظرية شكشك لكور المستويات المتعامدة
نظرية شكشك للدوائر المتماسة
نظرية شكشك للكرة الركنية لهرم ثلاثى منتظم
نظرية شكشك للمجسمات المتكافئة
حالة خاصة للدوائر المتماسة المتساوية .** تم

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف *- صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح) رقم ٠٣٣٦٢٢٤

*- صورة رقم قومى ٢٦٢١٠٠٧٢٤٠١٤٤

الموظف المختص بالإيداع
ناهد ابوالزيد

المراجعة
ناهد ابوالزيد

٤ / مدير إدارة
(حقوق المؤلف)
١٩ / ٣

جمهورية مصر العربية
المجلس الاعلي للثقافة
الامانة العامة
الادارة المركزية للشئون الادبية و المسابقات
ادارة حقوق المؤلف

شهادة إيداع مصنف مكتوب

رقم الوارد: 462 عدد المرفقات 53م تاريخ الأيداع 23 /9 / 2018 الساعة ص 10:26:15

اسم طالب الإيداع: عاطف شكشك عبد المجيد شكشك

رقم الأيداع: 462 الجنسية: مصرى التليفون: 01229930795

محل الأقامة: 8عمارات حى الزهور - بالخانكة - القليوبية

الحى : الخانكه المحافظة: القليوبية

اسم الشركة أو الهيئة:

اسم الوكيل: التليفون: ——

محل الأقامة: ——

عنوان المصنف: نظريات فى الهندسة المستوية والفراغية .

نوع المصنف: مصنف مكتوب - نظريات هندسية

نوع التصرف: استخراج شهادة ايداع مصنف مكتوب

الملخص

عبارة عن ٦نظريات +حقيقة هندسية كالآتى :١- نظرية شكشك لإشعة المستويات المتوازية
2- نظرية شكشك لتشابه الاهرامات
3- نظرية شكشك لمضلعات مثلثات المضلع المنتظم
4- نظرية شكشك لمراكز المثلثات القطرية لكرة
5- نظرية شكشك لرباعيات الشكل الرباعــى
6- نظرية شكشك لرباعيات أقطار الشكل الرباعى
7- حقيــقة هندسية للنجــمة الخماسيـــة الهندسية** تم

قائمة المستندات المودعة لأستخراج شهادة إيداع مصنف مكتوب

*- نسخه من المصنف *- (صورة قسيمة توريد ٣٣ (ع . ح 0113468

*- صورة رجواز سفر رقم A٠٩٨٤٩٠٦٦

الموظف المختص بالإيداع

المراجعة

مدير إدارة (حقوق المؤلف)

تصدر شهادة إيداع المصنفات على مسئولية طالبها ولا يعتد بها إلا فى شأن إثبات التاريخ الذى صدرت فيه ولا تخول صاحبها أى حق فى الحماية المقرره بموجب القانون رقم (٨٢) لسنة ٢٠٠٢ إلا طبقا لأحكامه.

المحتويات

نظرية دوران المثلث.	82

154	**مستندات الباحثة هدى**